Problemas de geometría diferencial

Bajo la redacción de A.S. FEDENKO



Editorial «MIR» Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Сборник задач по дифференциальной геометрии

под редакцией
А.С. ФЕДЕНКО

Москва "Наука"

Problemas de geometría diferencial

Bajo la redacción
de *A.S. FEDENKO*

Traducido al español
por A. I. Samojválov

Editorial · Mir · Moscú

Impreso en la URSS, 1981

На испанском языке

Indice

Prefacio

El presente libro contiene más de mil problemas y ejercicios referentes a las secciones principales del curso de geometría diferencial leído en las facultades físicomatemáticas de las universidades. Al preparar esta edición los autores trataron de tener en cuenta los cambios que se realizan actualmente en la enseñanza de las matemáticas.

La introducción de nuevos programas en la escuela media ha originado modificaciones en el modo de enseñar, en la terminología y las designaciones. En la obra procuramos apoyar y desarrollar estas innovaciones. Usamos sin restricciones todos los términos y designaciones adoptados en la escuela media. Prestamos atención especial a la definición exacta de los objetos principales que se estudian en el curso de geometría diferencial. Para la línea curva se dan dos definiciones. A saber, la curva es definida como clase de caminos parametrizados equivalentes. Por otro lado, se introduce el concepto de línea como variedad unidimensional. La superficie se considera como variedad bidimensional y se da de ordinario con ayuda de su parametrización. La mayoría de problemas se resuelve en el aspecto local, o sea, las figuras geométricas se examinan en el entorno de un punto fijo.

Al exponer el material, los autores han tratado de coordinar el curso de geometría diferencial con otros cursos matemáticos. Se utiliza ampliamente el aparato científico del álgebra lineal, del análisis matemático y de las ecuaciones diferenciales. Se atiende mucho al enlace con el curso de geometría en la escuela media y con el de geometría analítica.

El libro contiene una introducción, 6 capítulos y 21 parágrafos. Al final del mismo se incluye un índice alfabético de materias.

Esta obra puede ser recomendada en calidad de manual para las facultades físicomatemáticas de universidades e institutos pedagógicos.

Los autores

Designaciones

$\{a, b, c \ldots\}$ — conjunto compuesto por los elementos $a, b, c, \ldots$;

$\{x \mid x$ posee la propiedad $P\}$ — conjunto de todos los elementos que poseen la propiedad dada P;

$x \in A$ — x es un elemento del conjunto A (x pertenece a A);

$A \subset B$ — el conjunto A es un subconjunto del conjunto B;

$A \cup B$ — unión de los conjuntos A y B;

$A \cap B$ — intersección de los conjuntos A y B;

$A \setminus B$ — diferencia de los conjuntos;

$\varnothing$ — conjunto vacío;

$\mathbb{R}$ — conjunto de todos los números reales;

$\forall$ — (para) todo;

$\exists$ — existe (al menos un);

$p \Rightarrow q$ — de p se deduce q;

$p \Leftrightarrow q$ — p y q son equivalentes;

$a \cdot b$ — producto escalar de vectores;

$a \times b$ — producto vectorial de vectores;

abc — producto mixto de vectores.

Todas las demás designaciones se explican en el texto.

Introducción

Aplicación

Sean X e Y dos conjuntos arbitrarios no vacíos. Si a cada elemento del conjunto X le corresponde algún elemento del conjunto Y, entonces se dice que está dada la *aplicación* del conjunto X en el conjunto Y. Designando la aplicación con la letra f, se puede escribir

$$f\colon X \to Y, \qquad x \mapsto f(x). \tag{1}$$

El elemento $y = f(x)$ se llama *imagen del elemento* x, y si $A \subset X$, entonces el conjunto

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

se denomina *imagen del conjunto* A. El conjunto $f(X)$ se llama *imagen de la aplicación* f.

Si $f(X) = Y$, entonces se dice que f es la *aplicación del conjunto* X *sobre el conjunto* Y o f es una *sobreyección*. La aplicación f se denomina *inyección* si

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

La aplicación f que es simultáneamente una sobreyección y una inyección se llama *biyección*. De tal aplicación se dice que establece una *correspondencia biunívoca* entre los elementos de los conjuntos X e Y. Para la biyección f existe una *aplicación inversa*:

$$f^{-1}\colon Y \to X, \qquad f(x) \to x,$$

que también es una biyección.

Si $A \subset X$, entonces se puede considerar una *contracción de la aplicación* (1) sobre A:

$$f|_A\colon A \to Y, \qquad a \mapsto f(a), \qquad \text{donde} \quad a \in A.$$

En el caso en que en calidad de Y se toma el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, la aplicación (1) se llama *función*.

Supongamos que f: $X \to Y$ y g: $Y \to Z$ son aplicaciones. Entonces se puede determinar la aplicación

$$g \cdot f: X \to Z, \qquad x \mapsto g(f(x)),$$

que se llama *composición de las aplicaciones* f y g.

Para dos conjuntos X e Y su *producto directo* (o *cartesiano*) es el conjunto

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

de todos los pares (x, y), donde $x \in X$, $y \in Y$.

El espacio $\mathbb{R}^n$

Al conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

compuesto por las colecciones ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n números reales se le puede atribuir diferentes estructuras, $\mathbb{R}^n$ es un *espacio vectorial real n-dimensional*. De acuerdo con lo dicho, los elementos de $\mathbb{R}^n$ pueden llamarse *vectores* y designarse con a, b, x, y, . . . La base del espacio $\mathbb{R}^n$ compuesto por los vectores

$$i_1 = (1, 0, \ldots, 0), \qquad i_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$$
$$\ldots, i_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

se llama *canónica*. Designaremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ con (i, j, k).

$\mathbb{R}^n$ se puede considerar como espacio afín puntual relacionado con el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. En este caso los elementos de $\mathbb{R}^n$ se pueden tomar tanto por *puntos* y designar con M, N, . . ., como por vectores a, x, . . .

El vector $r = (x_1, \ldots, x_n)$ tiene las coordenadas x_1, x_2, . . ., x_n con respecto a la base canónica. El punto $A(x_1, \ldots, x_n)$ tiene las mismas coordenadas afines respecto al *sistema de referencia* $(O; i_1, i_2, \ldots, i_n)$, donde $O = (0, 0, \ldots, 0)$ es el origen de coordenadas.

Si a cualesquiera dos vectores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ del espacio $\mathbb{R}^n$ se les asigna en correspondencia el número

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

llamado *producto escalar de los vectores* x *e* y, entonces $\mathbb{R}^n$ será un *espacio euclídeo n-dimensional*. En este espacio se

introduce la noción de *distancia entre dos puntos* $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $N = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$|MN| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

En particular el plano y el espacio que se estudian en el curso escolar pueden ser identificados con $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, respectivamente, si se eligen en los mismos los sistemas de coordenadas cartesianas.

Llámase *esfera de radio* $\varepsilon > 0$ *con el centro en el punto* A al conjunto

$$B(A, \varepsilon) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid |AM| < \varepsilon\}.$$

Esta esfera se denomina *ε-entorno del punto* A.

El subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ se llama *conjunto abierto* si junto con todo punto suyo A contiene cierta esfera con centro en A. Todo conjunto abierto que contiene el punto A se denomina *entorno* de este punto.

El punto $A \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto de adherencia* del conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, si todo entorno de este punto contiene al menos un punto de U. La totalidad de todos los puntos de adherencia del conjunto U se dice *clausura* del conjunto U y se designa $\overline{U}$. El conjunto U se denomina *cerrado* si $\overline{U} = U$.

El conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se llama *conexo* si no existen conjuntos abiertos no intersecados U_1 y U_2 que parten al conjunto V en dos subconjuntos no vacíos V_1 y V_2, tales que $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$. El conjunto abierto y conexo se denomina *región*. La clausura de la región se llama *región cerrada*.

El punto del conjunto U se dice *interior* si pertenece a U junto con cierto entorno suyo. La totalidad de todos los puntos interiores del conjunto U se denomina *interioridad* de este conjunto.

El punto $M \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto de frontera* del conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ si en todo entorno suyo existen puntos tales que pertenecen al conjunto U y tales que no le pertenecen. La totalidad de todos los puntos de frontera del conjunto U se denomina *frontera* de este conjunto y se designa con ∂U.

Llámase *figura* Φ en el espacio $\mathbb{R}^n$ a todo subconjunto de puntos en él. Las ecuaciones que contienen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a los cuales les satisfacen aquellos y sólo aquellos puntos de $\mathbb{R}^n$ que pertenecen a Φ se denominan *ecuaciones*

de la figura 4). Sean $l: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal; $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ una base canónica de $\mathbb{R}^m$; $('i_1, 'i_2, \ldots, 'i_n)$ una base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sea $l(i_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}' i_j$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. La matriz

$$(\alpha_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq k \leq m}}$$

cuyas columnas son coordenadas de los vectores $l(i_k)$ se llama *matriz de la aplicación lineal* l. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $l(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} x_k.$$

Dos bases $(e_1, e_2, \ldots, e_m) = [e]$ y $(a_1, a_2, \ldots, a_m) = [a]$ de un espacio vectorial m-dimensional V se dicen *equivalentes* si el determinante de la matriz de paso de la base $[e]$ a la base $[a]$ (es decir, de la matriz de la transformación lineal del espacio V que convierte la base $[e]$ en la base $[a]$) es positivo. La clase de las bases equivalentes del espacio V se llama *orientación* de este espacio. En todo espacio vectorial existen solamente dos orientaciones una de las cuales se dice *positiva* y la otra, *negativa*. La elección de la orientación del espacio es equivalente a la elección de la base en este espacio.

Si V es un subespacio bidimensional en $\mathbb{R}^3$; (e_1, e_2) es la base V, y m es un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$ que no pertenece a V, entonces (e_1, e_2, m) es la base de $\mathbb{R}^3$. Si el vector m está ya elegido, entonces la base (e_1, e_2) se dice *positiva* si la base (e_1, e_2, m) es equivalente a la base canónica en $\mathbb{R}^3$. Ahora bien, la definición de la orientación en V es equivalente a la definición del vector m que frecuentemente se escoge ortogonal a V y unitario.

Llámase *forma lineal* de α en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ a la aplicación lineal $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supongamos que $\alpha(i_k) = \alpha_k$. Entonces para el vector $h = (h_1, \ldots, h_n)$

$$\alpha(h) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k;$$

A título de ejemplos de las formas lineales pueden servir las *funciones coordenadas*

$u_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$

Llámase *forma bilineal* sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ a la aplicación $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones:

$$\beta(h_1 + h_2, p) = \beta(h_1, p) + \beta(h_2, p),$$
$$\beta(\lambda h, p) = \lambda\beta(h, p),$$
$$\beta(h, p_1 + p_2) = \beta(h, p_1) + \beta(h, p_2),$$
$$\beta(h, \lambda p) = \lambda\beta(h, p).$$

Si $\beta(i_k, i_l) = \beta_{kl}$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ entonces

$$\beta(h, p) = \sum_{k, l=1}^{n} \beta_{kl} h_k p_l.$$

La forma bilineal β se dice *simétrica*, si $\beta(h, p) = \beta(p, h)$ y *antisimétrica* (o 2-*forma*) si $\beta(h, p) = -\beta(p, h)$. Para la forma bilineal simétrica $\beta_{kl} = \beta_{lk}$, para la forma antisimétrica $\beta_{kl} = -\beta_{lk}$. La aplicación $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *forma cuadrática* sobre el espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si existe una forma simétrica bilineal β tal que $q(h) = \beta(h, h)$. En coordenadas, $q(h)$ se expresa por la fórmula siguiente:

$$q(h) = \sum_{k, l=1}^{n} \beta_{kl} h_k h_l.$$

La forma cuadrática q se dice *correspondiente* a la forma bilineal β. Sean α y β dos formas lineales sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Llámase *producto exterior* de estas formas a la 2-forma

$$\alpha \wedge \beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

definida del modo siguiente:

$$(\alpha \wedge \beta)(h, p) = \frac{1}{2}\left(\alpha(h)\beta(p) - \alpha(p)\beta(h)\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha(h) & \alpha(p) \\ \beta(h) & \beta(p) \end{vmatrix}.$$

Sea M un punto arbitrario del espacio $\mathbb{R}^3$. Llámase *vector tangente* a $\mathbb{R}^3$ en el punto M al par (M, h), donde

h es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$. El vector tangente (M, h) se puede representar en forma de un par ordenado de puntos (M, N) tal, que el vector que le corresponde coincida con h (o sea, $M + h = N$), así como en forma de un vector h trazado en el punto M. El conjunto $T_M\mathbb{R}^3 = \{(M, h) \mid h \in \in \mathbb{R}^3\}$ de todos los vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ en el punto M se denomina *espacio vectorial tangente*. Las operaciones sobre los vectores de $\mathbb{R}^3$ se trasladan a los vectores tangentes en el mismo punto según la regla siguiente:

$$(M, h) + (M, p) = (M, h + p),$$
$$\alpha (M, h) = (M, \alpha h),$$
$$(M, h)\cdot(M, p) = h\cdot p.$$

Respecto a estas operaciones, $T_M\mathbb{R}^3$ es un espacio euclídeo y los vectores (M, i), (M, j), (M, k) forman su base ortonormalizada. Cuando el punto de tangencia M está indicado, el vector tangente (M, h) se puede designar sencillamente con h.

Llámase campo *vectorial* sobre $\mathbb{R}^3$ (o sobre cierto subconjunto de $\mathbb{R}^3$) a la representación del vector tangente a $\mathbb{R}^3$ en cada punto de $\mathbb{R}^3$ (o de su subconjunto).

Función vectorial

Sea U cierto conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{R}^m$. La aplicación

$$r\colon U \to R^n, \tag{2}$$

que le asigna a cada punto $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in U$ el vector $r(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^n$ se llama *función vectorial de m variables escalares*. La representación de una función vectorial es equivalente a la representación de n funciones escalares llamadas *componentes* de la misma:

$$r(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots$$
$$\ldots, x_n(u_1, \ldots, u_m)).$$

Supongamos que la función vectorial r está definida en cierto entorno del punto $M_0 \in \mathbb{R}^m$ a excepción, tal vez, del mismo punto M_0, y que a es cierto vector fijo. El vector a se denomina *límite* de la función vectorial r y se designa con $a = \lim\limits_{M \to M_0} r(M)$ si para $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ es

tal, que

$$0 < |MM_0| < \delta \Rightarrow |r(M) - a| < \varepsilon.$$

La función vectorial (2) definida en cierto entorno del punto M_0 se dice *continua* en este punto si

$$\lim_{M \to M_0} r(M) = r(M_0).$$

En el caso general, para un punto arbitrario $M_0 \in U$ la función vectorial (2) se dice *continua* en el punto M_0 si para cualquier entorno W en $\mathbb{R}^n$ del punto $r(M_0)$ se puede hallar un entorno V tal, en $\mathbb{R}^m$ del punto M_0, que $r(V \cap \cap U) \subset W$. La aplicación r: $U \to V$, donde U es un subconjunto en $\mathbb{R}^m$ y V es un subconjunto en $\mathbb{R}^n$, se denomina *homeomorfismo*, si es biyectiva y r es continuo junto con r^{-1}.

Examinemos la función vectorial $r = r(t)$ representada en un conjunto abierto de la recta $\mathbb{R}$, o sea, una función vectorial de una variable real t. Si esta función está definida en el punto t_0 y existe el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t},$$

éste se dice *derivada de la función vectorial* dada en el punto t_0 y se designa con $r'(t_0)$ o $\frac{dr}{dt}(t_0)$. Así aparece la función vectorial r' que denominaremos *derivada de la función vectorial* r. La función derivada de r' se llama segunda derivada de la función vectorial r. Llámase *derivada* $r^{(h)}$ *de* k*-ésimo orden* de la función vectorial r a la derivada de la función $r^{(h-1)}$. De la función que tiene una k-ésima derivada continua se dice que ella *pertenece a la clase* C^h. La función que tiene derivadas de cualquier orden se denomina *función de la clase* C^∞. Las funciones de la clase C^h se llaman con frecuencia *suaves*. La derivada $r'(t_0)$ de la función vectorial $r = r(t)$ se puede identificar con la aplicación lineal $r'(t_0)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que le asigna a cada $\tau \in \mathbb{R}$ el vector $\tau r'(t_0)$. Esta aplicación satisface la igualdad

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) - \Delta t\, r'(t_0)|}{|\Delta t|} = 0.$$

La aplicación lineal $r'(t_0)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se llama frecuentemente *diferencial* y se designa con $dr_{t_0} = r'(t_0)\, dt$.

La función vectorial $r = r(t)$ representada en el segmento $J = [\alpha, \beta]$ se dice *suave* si existe una función vectorial suave $\rho = \rho(t)$, representada sobre el intervalo $I =]a, b[$ que contiene el segmento J, tal que $\rho|_J = r$.

Para la función vectorial r de una variable real que pertenece a la clase C^h tiene lugar la *fórmula de Taylor*:

$$r(t+\Delta t) = r(t) + \Delta t\, r'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} r''(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{(\Delta t)^k}{k!}\left(r^{(h)}(t) + \varepsilon(t, \Delta t)\right),$$

donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(t, \Delta t) = 0$.

Examinemos ahora la función vectorial (2) dada en el subconjunto $\mathbb{R}^2$ de las variables u, v. Las derivadas parciales de esta función en el punto (u_0, v_0) se definen del modo siguiente:

$$\partial_u r(u_0, v_0) = r_u(u_0, v_0) = \lim_{h\to 0} \frac{r(u_0+h, v_0) - r(u_0, v_0)}{h},$$

$$\partial_v r(u_0, v_0) = r_v(u_0, v_0) = \lim_{h\to 0} \frac{r(u_0, v_0+h) - r(u_0, v_0)}{h},$$

$$\partial_{uu} r = r_{uu} = \partial_u(r_u), \quad \partial_{vv} r = r_{vv} = \partial_v(r_v),$$

$$\partial_{uv} r = \partial_{vu} r = r_{uv} = r_{vu} = \partial_u(r_v) = \partial_v(r_u).$$

La función vectorial $r\colon U \to \mathbb{R}^n$, $(u, v) \mapsto r(u, v)$, donde U es una región en $\mathbb{R}^2$, se dice *diferenciable* en el punto $M_0 \in U$ si existe una aplicación lineal $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ tal, que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|r(M_0+h) - r(M_0) - l(h)|}{|h|} = 0.$$

La función vectorial diferenciable en el punto M_0 será continua en este punto y la aplicación lineal $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ única y se llama *diferencial* (o *derivada*) de la función vectorial $r = r(u, v)$ en el punto M_0, designándose con dr_{M_0}. La diferencial dr_{M_0} se puede representar en forma de la aplicación $T_{M_0}\mathbb{R}^2$ en $T_{r(M_0)}\mathbb{R}^n$ identificando el vector $h \in \mathbb{R}^2$ con el vector tangente (M_0, h) a $\mathbb{R}^2$ en el punto M_0 y el vector $dr_{M_0}(h) = l(h) \in \mathbb{R}^n$, con el vector tangente $(r(M_0), dr_{M_0}(h))$ a $\mathbb{R}^n$ en el punto $r(M_0)$. Entonces,

si la función vectorial $\rho = \rho(t)$ satisface a las condiciones $\rho(t_0) = M_0$, $\rho'(t_0) = h$, el vector $dr_{M_0}(h)$ coincide con la derivada $(r \circ \rho)'(t_0)$ de la función vectorial de la función $(r \circ \rho)$. La función vectorial $r = r(u, v)$ se dice *diferenciable* siempre que sea diferenciable en cada punto de U. Las coordenadas u y v pueden interpretarse como funciones sobre U, $u\colon (u, v) \mapsto u$, $v\colon (u, v) \mapsto v$. Estas funciones serán diferenciales y sus diferenciales du y dv se ponen en correspondencia con el vector tangente (M, h), donde $h = (h_1, h_2)$; los números h_1 y h_2 son respectivamente $du_M(h) = h_1$, $dv_M(h) = h_2$. Representando de tal modo las diferenciales du y dv tiene lugar la fórmula

$$dr = \partial_u r\, du + \partial_v r\, dv.$$

Para el vector tangente $h = (h_1, h_2)$

$$dr(h) = \partial_u r\, du(h) + \partial_v r\, dv(h) = \partial_u r h_1 + \partial_v r h_2.$$

Si $r(u, v) = (f_1(u, v), \ldots, f_n(u, v))$ y $M_0 = (u_0, v_0)$, entonces la diferencial dr_{M_0} viene representada por la *matriz de Jacobi*:

$$\begin{pmatrix} \partial_u f_1(u_0, v_0) & \partial_v f_1(u_0, v_0) \\ \partial_u f_2(u_0, v_0) & \partial_v f_2(u_0, v_0) \\ \cdots & \cdots \\ \partial_u f_n(u_0, v_0) & \partial_v f_n(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

El espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^n$ se puede identificar con el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ representando la aplicación lineal por su matriz. Entonces para la función vectorial diferenciable $r = r(u, v)$ aparece la función vectorial $dr\colon U \to \mathbb{R}^{2n}$. La diferencial de la función vectorial dr en el punto M se llama *segunda diferencial* de la función vectorial r en el punto M y se designa con d^2r_M. La función vectorial $r = r(u, v)$ se denomina *dos veces diferenciable* si d^2r existe en cada punto de U; *continuamente diferenciable* (o *de la clase* C^1) si dr es continua; *de la clase* C^2 si d^2r es continua. Del mismo modo se determinan sucesivamente las diferenciales de orden k y las *funciones vectoriales de la clase* C^k que para abreviar denominaremos *suaves*. La aplicación lineal

$$d^2r_M : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n), \quad h \longmapsto d^2r_M(h)$$

se puede identificar con la aplicación bilineal $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^n$, que se designa también por d^2r_M, según la regla

$$d^2r_M(h, p) = d^2r_M(h)(p).$$

La aplicación bilineal d^2r_M es simétrica y la forma cuadrática que le corresponde se escribe frecuentemente así:

$$d^2r = \partial_{uu}r\, du^2 + 2\partial_{uv}r\, du\, dv + \partial_{vv}r\, dv^2.$$

Sean U, V las regiones en $\mathbb{R}^n$. La aplicación $f\colon U \to V$ se llama *difeomorfismo de la clase* C^k si f es biyectiva y pertenece a la clase C^k junto con su f^{-1} inversa.

Curva y línea

Sea I un intervalo, un segmento o un intervalo semiabierto sobre la recta $\mathbb{R}$. Llámase *camino* (o *curva parametrizada*) *de la clase* C^h en el espacio $\mathbb{R}^3$ a la función vectorial $r\colon I \to \mathbb{R}^3$ de la clase C^k que designaremos con (I, r). El camino (I, r) se dice:

1) *simple*, si la aplicación r es inyectiva;

2) *regular*, si para todo punto interior $t_0 \in I$

$$r'(t_0) \neq 0;$$

3) *birregular*, si para todo punto interior $t_0 \in I$

$$r'(t_0) \nparallel r''(t_0).$$

Dos caminos $(I, r = r(t))$ y $(J, \rho = \rho(s))$ de la clase C^h, donde I y J son intervalos, se denominan *equivalentes* si existe un difeomorfismo $\lambda\colon I \to J$ de la clase C^k tal que $r(t) = \rho(\lambda(t))$. Las clases de caminos equivalentes (de curvas parametrizadas) se llaman *curvas* y cada camino de esta clase, *parametrización de la curva*. La función $\lambda\colon I \to J$ que define la equivalencia de dos caminos se denomina *cambio de parámetro*. Si (I, r) es un camino, entonces el conjunto $r(I) \subset \mathbb{R}^3$ se llama *imagen de* este *camino*. Todos los caminos equivalentes que forman la curva dada tienen la misma imagen que se denomina *imagen de* esta *curva*. La imagen de una curva se dice frecuentemente curva, aunque diferentes curvas pueden tener la misma imagen. La curva cuya imagen se contiene en cierto plano se llama *plana*. Una curva es *simple* (*regular*, *birregular*) si existe su parametrización y resulta simple (regular, birregular).

Sea dado un camino $r = r(t)$. Examinemos todos los caminos equivalentes a él, que se obtienen con el cambio

del parámetro $s = \lambda(t)$ por la derivada positiva $\lambda'(t) > 0$. La clase de tales caminos se llama *curva orientada*. La parametrización $r = r(s)$ de la curva se dice *natural* si $|r'(s)| = 1$. Toda curva regular admite una parametrización natural. *El parámetro natural*, designado generalmente con s, es la longitud del arco de una curva medida a partir de cierto punto inicial y tomada con el signo $+$ o $-$. El subconjunto l de $\mathbb{R}^3$ se denomina *línea* (o *variedad unidimensional*) *de la clase* C^h si para todo punto $M \in l$ existen un entorno W de este punto en $\mathbb{R}^3$ y un camino regular (I, r) de la clase C^h que satisfacen a las condiciones: $r(I) = W \cap l$ y r: $I \to W \cap l$ es un homeomorfismo. El camino (I, r) se llama *parametrización de la línea* l. La línea l se denomina *elemental* siempre que exista una parametrización suya (I, r) tal, que $r(I) = l$. Si (I, r) y (J, ρ) son dos parametrizaciones de la línea l, entonces los caminos (I, r) y (J, ρ) son equivalentes. Si el subconjunto l se contiene en cierto plano, la línea l se dice *plana*.

Sea M cierto punto de la línea l y sea (I, r) una parametrización de l tal que $M = r(t)$. Llámase *recta tangente* de la línea l en el punto M a la recta que pasa por el punto M y que tiene como vector director suyo el vector $r'(t)$. De un modo análogo se determina la recta tangente para la curva y para el camino. Supongamos que $r = r(s)$ es la parametrización natural de una curva (o de una línea). Entonces el vector $r''(s)$ se denomina *vector de curvatura* de la curva (línea) en el punto s y la longitud del mismo $|r''(s)|$ se dice *curvatura* y se designa con $k(s)$ (o con k).

Llámase *plano osculador* de una curva (línea) birregular $\rho = \rho(t)$ en el punto t_0 al plano que pasa por el punto $\rho(t_0)$ y que tiene como sus vectores directores a $\rho'(t_0)$ y $\rho''(t_0)$.

Para la parametrización natural $r = r(s)$ de una curva (línea) birregular el vector $r''(s)$ es ortogonal a la tangente en el punto respectivo. Denomínase *circunferencia osculatriz* de una curva (línea) birregular en el punto s de esta curva (línea), a la circunferencia de radio $1/k(s)$ que se halla en el plano osculador y cuyo centro es el punto

$$r(s) + \frac{1}{k^2(s)} r''(s).$$

Llámase *sistema de referencia de Frenet* de una curva (línea) birregular orientada $r = r(s)$ en el punto s, a un sistema de referencia ortonormalizado $(r(s);\ t(s),\ n(s),\ b(s))$, donde $t(s) = r'(s)$, $n(s) \uparrow\uparrow r''(s)$ y los tres vectores $(t(s),\ n(s),\ b(s))$ son derechos.

Superficie

El subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ se llama *superficie* (o *variedad bidimensional*) *de la clase* C^h si para todo punto $A \in S$ existen un entorno W de este punto en $\mathbb{R}^3$ y un par (U, r), donde U es una región en $\mathbb{R}^2$, $r\colon U \to \mathbb{R}^3$, y satisfacen las condiciones:

1) la aplicación $r\colon U \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto r(u, v)$ pertenece a la clase C^h;

2) $r(U) = W \cap S$ y $r\colon U \to W \cap S$ es un homeomorfismo;

3) para todo punto $(u, v) \in U$ los vectores $\partial_u r(u, v)$ y $\partial_v r(u, v)$ son no colineales, o sea, rang $dr_{(u,v)} = 2$.

El par (U, r) se denomina *parametrización de la superficie* S, y los parámetros u, v, *coordenadas curvilíneas* sobre la misma. La superficie S se dice *elemental* si existe su parametrización (U, r) tal que $r(U) = S$.

Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ de la clase C^h. Si (U, r) es su parametrización, V es una región en $\mathbb{R}^2$ y $\lambda\colon V \to U$ es un difeomorfismo de la clase C^h, entonces el par $(V, r \circ \lambda)$ es también una parametrización de S. Por otro lado, si (U_1, r_1) y (U_2, r_2) son dos parametrizaciones de la superficie S, tales que $r_1(U_1) = r_2(U_2)$, entonces la aplicación $\lambda = r_2^{-1} \circ r_1\colon U_1 \to U_2$ es un difeomorfismo de la clase C^h y se llama *cambio de parametrización*. La aplicación $\rho\colon I \to S$, donde I es un intervalo sobre la recta, se denomina *camino* (*línea*) *suave sobre la superficie* S en $\mathbb{R}^3$ si la aplicación $I \to \mathbb{R}^3$ es suave (respectivamente, si $\rho(I)$ es una línea en $\mathbb{R}^3$ y (I, ρ) es su parametrización). Sean $\rho\colon I \to S$ un camino (línea) suave sobre la superficie S y (U, r), la parametrización de S; con ello $\rho(I) \subset r(U)$. Entonces la función vectorial suave $\mu\colon I \to U$, tal que $r(\mu(t)) \equiv \rho(t)$ se denomina *representación interior del camino* (*línea*); en este caso (I, μ) es el camino (línea) sobre la región U. Las líneas sobre la superficie S cuyas representaciones

interiores tienen la forma de $u = u_0 + t$, $v = v_0$ o $u = u_0$, $v = v_0 + t$ se llaman *líneas coordenadas*. Para un punto dado M sobre la superficie S el vector tangente h a $\mathbb{R}^3$ en el punto M se denomina *vector tangente a la superficie S en el punto M*, siempre que sobre la superficie S exista un camino (I, ρ) tal, que $\rho(t_0) = M$, $\rho'(t_0) = h$. El subconjunto de todos los vectores tangentes a la superficie S en el punto M es un subespacio vectorial bidimensional en $T_M\mathbb{R}^3$, se designa T_MS y se llama *espacio tangente a la superficie S en el punto M*. Si $M = r(u, v)$, donde (U, r) es la parametrización de S, entonces los vectores $\partial_u r(u,v)$ y $\partial_v r(u, v)$ que designaremos también $\partial_u r_M$ y $\partial_v r_M$, respectivamente, son tangentes a las líneas coordenadas que pasan por el punto M y forman una base del espacio tangente T_MS. La base $(\partial_u r, \partial_v r)$ se denomina *base movible* sobre la superficie S; con ello $T_MS = dr_{(u, v)}(\mathbb{R}^2)$. El plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto M y tiene T_MS como su subespacio director se llama *plano tangente* a la superficie S en el punto M. La recta que pasa por el punto M y es ortogonal al plano tangente se denomina *normal* a la superficie S en el punto M. Llámase *campo vectorial* ξ sobre la superficie S (o sobre el subconjunto $Q \subset S$) a la aplicación que pone en correspondencia con cada punto $M \in S$ (o $M \in Q$) el vector tangente ξ_M a la superficie S en el punto M. Como ejemplos de campos vectoriales sobre el subconjunto $r(U) \subset S$, donde (U, r) es la parametrización de S, pueden servir los campos $\partial_u r$ y $\partial_v r$ denominados *campos vectoriales básicos*. Para los campos vectoriales ξ y η y la función f sobre la superficie S se determinan las operaciones de adición de campos vectoriales y de producto de un campo vectorial por una función valiéndose de las fórmulas

$$(\xi + \eta)_M = \xi_M + \eta_M, \qquad (f\xi)_M = f(M)\,\xi_M,$$

donde en los segundos miembros de las igualdades se incluyen las operaciones determinadas en el espacio vectorial T_MS. Si el campo vectorial está definido sobre el subconjunto $r(U) \subset S$, entonces tiene lugar la descomposición de $\xi = \xi_1\partial_u r + \xi_2\partial_v r$, donde ξ_1, ξ_2 son las funciones determinadas sobre $r(U)$. Estas funciones se denominan *componentes del campo ξ con respecto a la base movible* $(\partial_u r, \partial_v r)$. Si el campo ξ está definido sobre toda la superficie S, entonces

sus componentes con respecto a la base movible $(\partial_u r, \partial_v r)$ se llaman *componentes de la contracción del campo* ξ *sobre el subconjunto* $r(U)$. El campo vectorial ξ se dice *continuo* si sus componentes con respecto a cualquier base movible son funciones continuas.

La orientación de la superficie S es la elección de la orientación en cada espacio vectorial tangente $T_M S$ lo que es equivalente a la elección del vector unitario $\mathbf{m}_M$, ortogonal a $T_M S$ para todos los $M \in S$. La parametrización (U, r) de la superficie S se dice *concordada con la orientación* si la base movible está orientada positivamente en todos los puntos, o sea, si la base $(\partial_u r, \partial_v r, m)$ es equivalente a la base canónica en $\mathbb{R}^3$. La orientación de la superficie S se dice continua si para todo punto M de S se halla la parametrización (U, r) concordada con la orientación y tal que $M \in r(U)$. Por regla general, se examinan sólo orientaciones continuas. Una superficie junto con su orientación continua se llama *orientada*.

La aplicación $f: S \to \mathbb{R}^n$ de la superficie S en el espacio $\mathbb{R}^n$ se denomina suave si para cualquier parametrización (U, r) de esta superficie la función vectorial $f \circ r: U \to \mathbb{R}^n$ definida sobre la región U de $\mathbb{R}^2$ es suave. En particular, cuando $n = 1$, obtenemos la definición de una función suave sobre la superficie. Sea Q otra superficie en $\mathbb{R}^3$. La aplicación $f: S \to Q$ se puede considerar también como la aplicación S en $\mathbb{R}^3$, teniendo en cuenta que Q es un subconjunto en $\mathbb{R}^3$. La aplicación $f: S \to Q$ se dice suave si es suave como aplicación S en $\mathbb{R}^3$. El campo vectorial ξ sobre la superficie S se llama *suave* si sus componentes con respecto a cualquier base movible son funciones suaves. Los campos vectoriales de base $\partial_u r$ y $\partial_v r$ son suaves.

Supongamos que $f: S \to Q$ es una aplicación suave de las superficies y $\rho = \rho(t)$ es un camino suave sobre la superficie S que pasa por el punto $M = \rho(t_0)$. Entonces $f \circ \rho = (f \circ \rho)(t)$ es un camino suave sobre la superficie Q que pasa por el punto $M' = f(M) = f \circ \rho(t_0)$. La aplicación $T_M S$ en $T_{M'} Q$ que pone al vector tangente $\rho'(t_0)$ en correspondencia con el vector tangente $(f \circ \rho)'(t_0)$ se denomina *diferencial* (o *aplicación derivada*) *de la aplicación* f *en el punto* M y se designa con df_M. La diferencial $df_M: T_M S \to T_{M'} Q$ es una aplicación lineal.

CAPÍTULO 1

Función vectorial Los conceptos de curva, línea y superficie

---

1. Mostrar que las componentes de la función vectorial $r = r(M)$ se hallan por la regla

$$x_j(M) = i_j \cdot r(M) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ es la base canónica del espacio $\mathfrak{R}^n$.

2—6. Demostrar que de la existencia de los límites

$$\lim_{M \to M_0} r_i(M) = a_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lambda$$

se deducen la existencia de los límites indicados a continuación y las fórmulas respectivas:

(2) $\lim\limits_{M \to M_0} (r_1(M) \pm r_2(M)) = a_1 \pm a_2.$

(3) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M)\, r_1(M)) = \lambda a_1.$

(4) $\lim\limits_{M \to M_0} (r_1(M) \cdot r_2(M)) = a_1 \cdot a_2.$

(5) $\lim\limits_{M \to M_0} (r_1(M) \times r_2(M)) = a_1 \times a_2.$

(6) $\lim\limits_{M \to M_0} (r_1(M)\, r_2(M)\, r_3(M)) = a_1 a_2 a_3.$

7. Demostrar que la continuidad de la función vectorial es equivalente a la continuidad de sus componentes.

8. ¿Se deduce de la continuidad de la función vectorial $r = r(M)$ la continuidad de la función $|r| = |r(M)|$? ¿Es cierto lo contrario?

9—13. Demostrar que la continuidad de la función vectorial $r_i(M)$ y de la función $f(M)$ en el punto M_0 deter-

mina la continuidad de las funciones siguientes en este punto:

(9) $r_1(M) \pm r_2(M)$. (10) $f(M)\, r_1(M)$.

(11) $r_1(M) \cdot r_2(M)$. (12) $r_1(M) \times r_2(M)$.

(13) $r_1(M)\, r_2(M)\, r_3(M)$.

14. Demostrar que la suavidad de la función vectorial es equivalente a la suavidad de sus componentes.

15. Demostrar que

$$r^{(h)}(t) = x_1^{(h)}(t),\ x_2^{(h)}(t),\ \ldots,\ x_n^{(h)}(t)).$$

16—20. Demostrar que para las funciones vectoriales $r_i\colon I \to \mathbb{R}^3$ y la función $f\colon I \to \mathbb{R}$ de la clase C^1 existen las fórmulas siguientes:

(16) $(r_1 \pm r_2)' = r_1' \pm r_2'$.

(17) $(fr)' = f'r + fr'$.

(18) $(r_1 \cdot r_2)' = r_1' \cdot r_2 + r_1 \cdot r_2'$.

(19) $(r_1 \times r_2)' = r_1' \times r_2 + r_1 \times r_2'$.

(20) $(r_1 r_2 r_3)' = r_2' r_2 r_3 + r_1 r_2' r_3 + r_1 r_2 r_3'$.

21—26. Hallar las derivadas de las funciones siguientes de una variable real t:

(21) r^2. (22) r'^2.

(23) $r' \times r''$. (24) $r' r'' r'''$.

(25) $(r' \times r'') \times r'''$. (25) $\sqrt{r^2}$.

27. Demostrar la propiedad bisectorial de la tangente a la elipse: la tangente a la elipse en un punto arbitrario de ésta M es la bisectriz del ángulo adyacente al comprendido entre los radios focales del punto de tangencia.

28. Hallar para la función vectorial $r(t) = (t^2 + 8,\ 4t - 7,\ t + 5)$ el valor t_0 con el cual la aplicación lineal $r'(t_0)$ convierte al número 2 en el vector (4, 8, 2).

29. ¿Se deduce de la suavidad de la función vectorial $r = r(t)$ la suavidad de la función $|r| = |r(t)|$?

30. ¿Se puede afirmar que para la función $r(t)$ existen las igualdades:

a) $|r'| = |r|'$; b) $r \cdot r' = |r|\,|r'|$?

31. Para que la función vectorial $r = r(t)$ tenga sobre cierto intervalo una derivada nula, es necesario y suficiente que el vector $r(t)$ sea constante, o sea, no dependa de t. Demuéstrese esto.

32. Para que en todos los puntos de cierto intervalo los vectores $r(t)$ y $r'(t)$ sean ortogonales es necesario y suficiente que $|r(t)| = \text{const}$. Demuéstrese esto.

33. Sea $r = r(t)$ una función vectorial de la clase C^1, $r(t) \neq 0$. Para que el vector $r(t)$ tenga un sentido constante es necesario y suficiente que en la región de cambio de los vectores $r(t)$ y $r'(t)$ sean colineales. Demuéstrese esto.

34. Supongamos que para la función vectorial $r = r(t)$ de la case C^2 en todos los puntos de su definición existen las relaciones

$$r(t)\, r'(t)\, r''(t) = 0, \qquad r(t) \times r'(t) \neq 0.$$

Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial $r = r(t)$ es plana.

35. Supongamos que para la función vectorial $r = r(t)$ de la clase C^2 definida sobre el intervalo $]a, b[$ las derivadas $r'(t)$ y $r''(t)$ son distintas del cero y colineales para todo $t \in]a, b[$. Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial $r = r(t)$ es un intervalo de la recta.

36. Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial $r = r_0 + tr_1 + t^2 r_2$, $t \in \mathbb{R}$, donde r_0, r_1, r_2 son vectores constantes, es una parábola si los vectores r_1 y r_2 no son colineales. ¿Qué pasa en caso de que sean colineales los vectores r_1 y r_2?

37. Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial

$$r = r_0 + \cos t r_1 + \operatorname{sen} t r_2, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

es una elipse si los vectores r_1 y r_2 no son colineales. ¿Qué será en el caso de un carácter colineal de los vectores r_1 y r_2?

38. Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial

$$r = r_0 + \operatorname{ch} t r_1 + \operatorname{ch} t r_2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es la rama de una hipérbola si los vectores r_1 y r_2 son no colineales. ¿Qué será en el caso de un carácter colineal de los vectores r_1 y r_2?

39. Demostrar que la trayectoria de un punto material que se mueve bajo la acción de una fuerza central es plana.

40. Demostrar que dos curvas suaves parametrizadas $r(t) = (t, 0, 0)$ y $r_1(t) = (t^3, 0, 0)$ no son equivalentes, aunque la imagen de cada una de ellas sea una recta.

41. Demostrar que las figuras planas siguientes son líneas y señalar cualesquiera parametrizaciones suyas: a) recta, b) circunferencia, c) elipse, d) parábola, e) hipérbola.

42. Demostrar que la circunferencia S^1 no admite una parametrización (I, r) en el sentido de definir una línea tal que $r(I) = S^1$.

43. Mostrar que toda curva regular (I, r) es simple localmente, o sea, para cualquier $t_0 \in I$ existe un intervalo $J \subset I$ tal que $t_0 \in J$ y $(J, r|_J)$ sea una curva simple.

44. Demostrar que la imagen de una curva regular es localmente una línea.

45. Demostrar que toda curva regular define exactamente dos curvas orientadas.

46. Para que una función vectorial $r = r(u, v)$ tenga en cierta región derivadas parciales nulas o una diferencial nula es necesario y suficiente que el vector $r(u, v)$ sea constante. Demuéstrese esto.

47. Para que en cada punto de cierta región de cambio de los parámetros u y v el vector $r(u, v)$ sea ortogonal a los vectores $\partial_u r(u, v)$ y $\partial_v r(u, v)$ es necesario y suficiente que $|r(u, v)| = \text{const}$. Demuéstrese esto.

48. Sea $r = r(u, v)$ una función vectorial de la clase C^1. Para que el vector $r(u, v)$ tenga un sentido constante es necesario y suficiente que en la región de cambio de los parámetros u y v el vector $r(u, v)$ sea colineal al vector $\partial_u r(u, v)$ y al vector $\partial_v r(u, v)$. Demuéstrese esto.

49. Para que la imagen de una función vectorial suave $r = r(u, v)$ que satisface la condición $\partial_u r \nparallel \partial_v r$ pertenezca a cierto plano es necesario y suficiente que los vectores $\partial_u r$ y $\partial_v r$ sean paralelos a este plano. Demuéstrese esto.

50—53. Sean r_0, r_1, r_2, r_3 vectores constantes y, además, los vectores r_1, r_2, r_3 son no colineales. Hallar las imágenes

de las funciones vectoriales siguientes:

(50) $r = r_0 + ur_1 + u^2 r_2 + vr_3$.

(51) $r = r_0 + \cos u r_1 + \operatorname{sen} u r_2 + vr_3$.

(52) $r = r_0 + \left(u + \frac{1}{u}\right) r_1 + \left(u - \frac{1}{u}\right) r_2 + vr_3$.

(53) $r = r_0 + u \cos v r_1 + u \operatorname{sen} v r_2 + u^2 r_3$.

54. Mostrar que el plano es una superficie elemental. Escribir cualesquiera dos parametrizaciones suyas.

55—63. Mostrar que las figuras siguientes son superficies en $\mathbb{R}^3$ y construir sus parametrizaciones:

(55) Esfera.

(56) Elipsoide.

(57) Paraboloide elíptico.

(58) Hiperboloide de un casco.

(59) Hiperboloide de dos cascos.

(60) Cilindro elíptico.

(61) Cilindro parabólico.

(62) Cilindro hiperbólico.

(63) Cono sin vértice.

64. Sean U una región en $\mathbb{R}^2$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función de la clase C^h. Mostrar que el gráfico de la función f, o sea, el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}$ es una superficie elemental de la clase C^h, y que la función vectorial $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es su parametrización.

65. Mostrar que toda superficie S es localmente el gráfico de cierta función, o sea, para todo punto $M \in S$ se puede hallar un entorno W de este punto en $\mathbb{R}^3$ tal, que $S \cap W$ sea el gráfico de cierta función.

66. Sean $r\colon V \to \mathbb{R}^3$, donde V es una región en $\mathbb{R}^2$, y $\partial_u r \nparallel \partial_v r$ para todos los puntos de V. a) ¿Es una superficie el conjunto $r(V)$? b) Mostrar que para todo punto $(u, v) \in V$ existe una región U en $\mathbb{R}^2$, tal, que $(u, v) \in U \subset V$ y $r(U)$ es una superficie de la clase C^h.

67. Sea la función vectorial $r(u, v) = (u, v, 0)$, donde $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \mid v = 0,\ u \geqslant 0\}$, es una parametrización de la superficie S. a) Determinar la forma de la superficie S. b) Hallar una región sobre la cual la función vectorial $\rho(r, \varphi) = (r \cos \varphi,\ r \operatorname{sen} \varphi,\ 0)$ es la parametrización de la superficie S. Construir la sustitución de las parametrizaciones indicadas.

CAPITULO 2

Líneas y curvas planas

§ 1. Distintos métodos de representación

Si la función vectorial $r: I \to \mathbb{R}^2$, $t \to r(t)$ es parametrización de la línea o de la curva, entonces la igualdad

$$r = r(t) \qquad (1)$$

se llama *ecuación vectorial de la línea* (*curva*). Si $(x(t), y(t))$ son componentes de la función vectorial (1) con respecto al sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en $\mathbb{R}^2$, entonces la ecuación (1) es equivalente a dos ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \qquad (2)$$

Un caso particular de la representación paramétrica (2) es la *representación explícita de una línea* (*curva*):

$$y = f(x). \qquad (3)$$

La línea (imagen de una curva) puede ser definida también con ayuda de la ecuación

$$F(x, y) = 0 \qquad (4)$$

que es una *representación implícita*.

En vez de las coordenadas rectangulares cartesianas se pueden utilizar también las coordenadas polares.

68. Escribir la ecuación de una figura plana constituida por todos los puntos cuyo producto de distancias hasta dos puntos dados F_1 y F_2 ($|F_1F_2| = 2b$) es una magnitud constante igual a a^2 (*óvalos de Cassini*). ¿Cuáles de estas figuras son líneas y cuáles pueden ser imágenes de curvas?

69. Se dan una circunferencia con diámetro OA, largo $2a$ y la tangente a ella en el punto A. Por el punto O se traza el rayo OC y éste lleva el segmento OM congruente al segmento BC, comprendido entre la circunferencia y la tangente AB. Al girar el rayo OC alrededor del punto O el

punto M se desplaza por la trayectoria que se llama *cisoide de Diocles.* Hallar la ecuación de esta trayectoria. ¿Es una línea la cisoide de Diocles?

70. Un rayo arbitrario OE corta en los puntos D y E la circunferencia

$$x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

y la tangente a la misma que pasa por el punto C diametralmente opuesto a O. Por los puntos D y E están trazadas las rectas, respectivamente paralelas a los ejes Ox y Oy, hasta intersecarse en el punto M. Encontrar la ecuación de la línea formada por los puntos M (*curva de Agnesi*).

71. El punto M se desplaza uniformemente por la recta ON que gira uniformemente alrededor del punto O. Hallar la ecuación de la trayectoria del punto M (*espiral de Arquímedes*).

72. La recta OL gira en torno al punto O con una velocidad angular constante ω. El punto M se mueve por la recta OL con una velocidad proporcional a la distancia $|OM|$. Encontrar la ecuación de la línea descrita por el punto M (*espiral logarítmica*).

73. Un segmento AB de longitud constante $2a$ se desliza con sus extremos por los ejes del sistema rectangular de coordenadas xOy. Desde el origen de coordenadas está trazada la recta OM perpendicular a AB. Hallar la ecuación de la figura formada por los puntos M (*rosa de cuatro pétalos*). ¿Es una línea esta figura? ¿Puede ser ella la imagen de una curva?

74. En torno a cierto punto O de una circunferencia de radio a gira un rayo. En este rayo, por ambos lados del punto A a sus intersecciones con la circunferencia, se trazan los segmentos AM_1 y AM_2 de longitud $2b$. Encontrar la ecuación de la figura descrita por los puntos M_1 y M_2 (*caracol de Pascal*; en particular, cuando $a = b$, *cardioide*). ¿Todo caracol de Pascal es una línea?

75. Una recta $x = a$ corta el eje Ox en el punto A y un rayo arbitrario OB lo corta en el punto B. El rayo lleva trazados, por ambos lados del punto B, los segmentos BM_1 y BM_2 congruentes al segmento AB. Escribir la ecuación de la figura Φ formada por todos los puntos M_1 y M_2

(*estrofoide*). ¿Son líneas las figuras Φ y $\Phi \setminus A$? ¿Pueden ser estas figuras imágenes de curvas?

76. Por el punto E $(a, \pi/2)$ dado en coordenadas polares se traza una recta paralela al eje polar. Un rayo arbitrario OK corta esta recta en el punto K. El rayo lleva trazados, por ambos lados del punto K, los segmentos congruentes KM_1 y KM_2 de largo l. Escribir la ecuación de la figura constituida por todos los puntos M_1 y M_2 (*concoide de Nicomedes*). ¿Es línea la concoide de Nicomedes? ¿Puede ser ella la imagen de una curva?

77. El segmento AB de longitud a se desliza con sus extremos por los ejes del sistema rectangular de coordenadas. Las rectas AC y BC, paralelas a los ejes de coordenadas, se cortan en el punto C desde el cual se baja la perpendicular CM a la recta AB. Escribir la ecuación de la figura compuesta por los puntos M (*astroide*). ¿Es una línea la astroide?

78. Encontrar las ecuaciones paramétricas del desarrollo de una circunferencia, o sea, de la trayectoria del extremo de un hilo bien tenso que se desarrolla de una bobina plana redonda fija.

79. Un círculo de radio a rueda sin deslizar por una recta. Hallar las ecuaciones de la trayectoria del punto M rígidamente acoplado al círculo y alejado a una distancia d desde su centro (*cicloide* para $d = a$, *cicloide corta* para $d < a$, *cicloide larga* para $d > a$).

80. Una circunferencia de radio r rueda sin deslizar por la circunferencia de radio R quedando fuera de ésta. Encontrar la ecuación de la trayectoria de un punto M de la circunferencia que va rodando (*epicicloide*). ¿Qué pasa cuando $r = R$?

81. Una circunferencia de radio r rueda sin deslizar por la circunferencia de radio R quedando dentro de ésta. Escribir las ecuaciones de la trayectoria de un punto M de la circunferencia que va rodando (*hipocicloide*). ¿Qué pasa cuando $R = 4r$, $R = 2r$?

82. Dada la curva

$$x = t^3 - 2t, \qquad y = t^2 - 2.$$

¿Se encuentran sobre su imagen los puntos M $(-1, -1)$, N $(4, 2)$, P $(1, 2)$? Hallar los puntos de intersección de

la imagen de la curva con los ejes de las coordenadas. Escribir la ecuación implícita de la imagen de la curva.

83. Hallar las parametrizaciones de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ tomando como parámetro: a) el coeficiente angular de una recta que pasa por el origen de las coordenadas y un punto de la circunferencia; b) el ángulo comprendido entre el eje Ox y una recta que pasa por un punto de la circunferencia y su centro.

84—91. Construir las imágenes de las curvas siguientes:

(84) $x = t^2 - t + 1,\qquad y = t^2 + t + 1.$

(85) $x = t^2 - 2t + 3,\qquad y = t^2 - 2t + 1.$

(86) $x = a \operatorname{sen}^2 t,\qquad y = b \cos^2 t.$

(87) $x = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}},\qquad y = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}.$

(88) $x = 3^t + 3^{-t},\qquad y = 3^t - 3^{-t}.$

(89) $x = \dfrac{a-t}{a+t},\qquad y = \dfrac{t}{a+t}.$

(90) $x = a \ln t,\qquad y = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right).$

(91) $x = a + R\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y = b + R\,\dfrac{2t}{1+t^2}.$

92. Las parametrizaciones de una hipérbola se pueden tomar de la forma

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\qquad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

¿Como se mueve un punto por la hipérbola cuando el parámetro t crece de $-\infty$ a $+\infty$? ¿Qué reemplazo del parámetro hay que efectuar para que la parametrización de la rama derecha de la hipérbola tome la forma

$$x = a \operatorname{ch} \varphi,\qquad y = b \operatorname{sh} \varphi?$$

93. Mostrar que las ecuaciones

$$x = a \cos \theta,\qquad y = b \operatorname{sen} \theta$$

y

$$x = a\,\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y = b\,\frac{2t}{1+t^2}$$

son parametrizaciones de la misma línea. Dibujar esta línea. ¿Cómo se desplaza un punto por la línea cuando el parámetro t crece de $-\infty$ a $+\infty$?

94—104. Señalar qué líneas se definen en coordenadas polares por las ecuaciones siguientes:

(94) $r = 4$.

(95) $r = 2a \cos \varphi$, (96) $r = \dfrac{a}{\cos \varphi}$.

(97) $r = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \varphi}$. (98) $r = \dfrac{16}{5 - 3 \cos \varphi}$.

(99) $r = \dfrac{16}{3 - 5 \cos \varphi}$. (100) $r = \dfrac{2}{1 - \cos \varphi}$.

(101) $r^2 \cos 2\varphi = a^2$. (102) $r = b \operatorname{sen} \varphi$.

(103) $r = \sec^2 (\varphi/2)$. (104) $r = \operatorname{cosec}^2 (\varphi/2)$.

105. La curva que tiene la parametrización $r(t) = (x(t), y(t))$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones racionales del parámetro t, se llama *unicursal*. Mostrar que una curva es unicursal si su imagen puede ser definida por la ecuación que tiene la forma

$$\varphi_n (x, y) + \varphi_{n-1} (x, y) = 0,$$

donde $\varphi_n (x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado n.

106—110. Mostrar que las figuras definidas por las ecuaciones que siguen a continuación son imágenes de curvas unicursales y hallar las parametrizaciones respectivas:

(106) $x^2 + y^2 - ax = 0$.

(107) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

(108) $(x^2 + y^2) x - 2ay^2 = 0$.

(109) $r = a (1 + \cos \varphi)$.

(110) $(x^2 + y^2) x + a^2 (x^2 - y^2) = 0$.

§ 2. Tangencia. Tangente y normal

Las ecuaciones de las tangentes a las líneas (curvas) definidas por las ecuaciones (1)—(4) del § 1 tienen, respectivamente, la forma

$$\rho = y + \lambda r',$$

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'},$$

$$Y - y = f'(x)(X - x),$$
$$(X - x) F_x + (Y - y) F_y = 0,$$

donde X, Y son las coordenadas corrientes de un punto sobre la tangente, ρ es el radio vector de este punto, x e y son las coordenadas del punto de tangencia. Las ecuaciones de las normales tienen, respectivamente, la forma

$$(\rho - r) \cdot r' = 0,$$
$$(X - x) x' + (Y - y) y' = 0,$$
$$X - x + (Y - y) f'(x) = 0,$$
$$\frac{X - x}{F_x} = \frac{Y - y}{F_y}.$$

Si para dos líneas que tienen un punto común M_0 existen parametrizaciones naturales suyas $r_1 = r_1(s)$, $r_2 = r_2(s)$ tales, que $r_1(s_0) = r_2(s_0) = M_0$ y

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|r_1(s_0 + \Delta t) - r_2(t_0 + \Delta s)|}{(\Delta s)^k} = 0,$$

además k es el máximo entre los números que satisfacen a esta condición, entonces se dice que estas líneas en el punto indicado tienen una *tangencia de orden* k. Dos líneas tienen en el punto común M_0 la tangencia de orden k si, y sólo si, existen parametrizaciones naturales suyas $r_1 = r_1(s)$, $r_2 = r_2(s)$ tales, que $r_1(s_0) = r_2(s_0) = M_0$, y, con $s = s_0$,

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{dr_2}{ds}, \quad \ldots, \quad \frac{d^k r_1}{ds^k} = \frac{d^k r_2}{ds^k}, \quad \frac{d^{k+1} r_1}{ds^{k+1}} \neq \frac{d^{k+1} r_2}{ds^{k+1}}.$$

Si para dos líneas que tienen un punto común M_0 existen parametrizaciones suyas $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$ tales, que $r_1(t_0) = r_2(t_0) = M_0$ y, con $t = t_0$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d^k r_1}{dt^k} = \frac{d^k r_2}{dt^k}, \quad \frac{d^{k+1} r_1}{dt^{k+1}} \neq \frac{d^{k+1} r_2}{dt^{k+1}},$$

entonces estas líneas tienen en el punto M_0 una tangencia de orden k.

Supongamos que para una línea está representada la parametrización $x = x(t)$, $y = y(t)$ y la segunda línea está representada en la forma implícita $F(x, y) = 0$. Si en cierto punto, que pertenece a ambas líneas, se cumplen las

relaciones

$$F(x(t),\ y(t))=0,\ \frac{dF}{dt}=0,\ \ldots,\ \frac{d^kF}{dt^k}=0,\quad \frac{d^{k+1}F}{dt^{k+1}}\neq 0,$$

entonces las líneas tienen en este punto una tangencia de orden k.

111—127. Encontrar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las líneas y curvas siguientes:

(111) $y=x^2+4x+3$ en los puntos A, B, C con las abscisas -1, 0, 1.

(112) $y=x^3$ en los puntos A, B con las abscisas 0 y 1.

(113) $y=\operatorname{sen} x$ en los puntos con las abscisas 0, $\pi/2$, π.

(114) $y=\operatorname{tg} x$ en los puntos con las abscisas 0, $\pi/4$.

(115) $x=t^3-2t$, $y=t^2+1$ en el punto A $(t=1)$.

(116) $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$.

(117) $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$.

(118) $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen} t$.

(119) $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $\quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$.

(120) $x^3+y^3-3axy=0$ en el punto A $(3a/2,\ 3a/2)$.

(121) $(x^2+y^2)\,x-ay^2=0$ en el punto A $(a/2,\ a/2)$.

(122) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=C$.

(123) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $\qquad$ (124) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

(125) $y^2=2px$. $\qquad$ (126) $r=a\varphi$.

(127) $r=2a\cos\varphi$ en el punto A para el cual $\varphi=\pi/4$.

128. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y=x^2$ forma con el eje Ox un ángulo de 45°?

129. ¿Puede el ángulo de inclinación de la tangente en cierto punto de la línea $y=x^3$ al eje Ox ser igual a $3\pi/4$?

130. Mostrar que el ángulo φ de inclinación de la tangente en un punto arbitrario de la línea

$$y=x^5+2x^3+x-1$$

al eje Ox está comprendido dentro de los límites $\pi/4\leqslant\varphi<\pi/2$.

131. Hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ que sea paralela a la recta

$$y = 4x - 5.$$

132. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ es perpendicular a la recta $x - 2y + 8 = 0$?

133. En la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ escoger las constantes b y c de modo que la parábola sea tangente a la recta $y = 3x - 5$ en el punto con abscisa $x = 2$.

134. ¿En qué puntos con la misma abscisa (no igual a cero) las tangentes a las líneas $y = x^2$, $y = x^3$ son paralelas?

135. Demostrar que sólo una normal de la línea $y = x^n$ (n es un número entero positivo) pasa por el origen de coordenadas.

136. Hallar las tangentes a la curva $x = t^2 - 1$, $y = t^3 + 1$ que sean paralelas a la recta $2x - y + 3 = 0$.

137. Hallar las tangentes a la curva $x = t^3$, $y = t^2$ que pasan por el punto $M(-7, -1)$.

138. Mostrar que las líneas

$$y = a \operatorname{sen}(x/a), \quad y = a \operatorname{tg}(x/a), \quad y = a \ln(x/a)$$

cortan el eje Ox en un ángulo que no depende de la magnitud a.

139. Hallar las tangentes a la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

que estén más alejadas del origen de las coordenadas.

140. Demostrar que para todo punto M de la hipérbola equilatera $x^2 - y^2 = a^2$ el segmento de la normal desde el punto M hasta el punto de intersección con el eje Ox es congruente al segmento OM.

141. Demostrar que todas las normales de la desarrollante de la circunferencia $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ están a una misma distancia del origen de las coordenadas.

142. Mostrar que si todas las normales de una línea plana pasan por un punto fijo, entonces la línea es una circunferencia o parte de ésta.

143—146. Hallar los puntos de intersección y los ángulos con que se intersecan las líneas siguientes:

(143) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

(144) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 6x = 9$.

(145) $x^2 + y^2 + 2x = 7$, $y^2 = 4x$.

(146) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$.

147—149. Demostrar que las líneas siguientes se intersecan formando un ángulo recto:

(147) $y = x - x^2$, $y = x^2 - x$.

(148) $y^2 = 2ax + a^2$, $y^2 = -2bx + b^2$.

(149) $x^2 - y^2 = a$, $xy = b$.

150. Mostrar que la tangente del ángulo formado por la tangente a la curva $r = r(\varphi)$ con el radio vector trazado al punto de tangencia se define por la fórmula

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{dr/d\varphi}.$$

151. Mostrar que el ángulo comprendido entre la tangente y el radio vector en un punto arbitrario de la cardioide es igual a la mitad del ángulo polar.

152. Demostrar que las tangentes a la cardioide $r = 2a(1 - \cos\varphi)$ trazadas en los extremos de una cuerda que pasa por el polo, son recíprocamente perpendiculares.

153. Demostrar que el ángulo comprendido entre una tangente a la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$ y el radio vector trazado desde el polo al punto de tangencia tiende a 90° cuando $|\varphi| \to \infty$.

154. Demostrar que el ángulo μ formado por una tangente en un punto arbitrario de la espiral logarítmica $r = ca^{\varphi}$, $a > 0$, con el radio vector del punto de tangencia, es constante.

155. Demostrar que sólo las espirales logarítmicas y las circuferencias poseen la propiedad indicada en el problema 154.

156. Demostrar que el ángulo μ formado por la tangente en un punto arbitrario de la lemniscata de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ con el radio vector del punto de tangencia es igual a $2\varphi + \frac{\pi}{2}$, donde φ es el ángulo polar del punto de tangencia. Basándose en esta propiedad, señalar el método de construir la tangente y la normal a un punto arbitrario de la lemniscata.

157. Sean dadas las curvas en coordenadas polares: $r = r(\varphi)$ y $r_1 = r_1(\varphi)$. Mostrar que ellas se intersecan formando un ángulo recto si $rr_1 + r'r_1' = 0$.

158—159. Mostrar que las curvas siguientes se intersecan formando un ángulo recto:

(158) $r = ae^{\varphi}$, $\quad r = be^{-\varphi}$.

(159) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\quad r = a(1 - \cos\varphi)$.

160. Supongamos que la tangente a la línea $y = y(x)$ en el punto M corta el eje Ox en el punto T, y que la normal lo hace en el punto N, suponiendo que P es la proyección del punto M sobre el eje Ox. Demostrar que las longitudes de la tangente MT, de la normal MN, de la subtangente PT y de la subnormal PN se expresan por las fórmulas

$$|MT| = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1 + y'^2}, \qquad |MN| = |y| \sqrt{1 + y'^2},$$

$$|PT| = \left|\frac{y}{y'}\right| \qquad |PN| = |yy'|.$$

161—162. Hallar las longitudes de la tangente, de la subtangente, de la normal y de la subnormal de las líneas:

(161) $y = \operatorname{tg} x$ en el punto M con abscisa $\pi/4$.

(162) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en un punto cualquiera.

163. Hallar las líneas en las cuales la longitud de la subnormal es constante e igual a k.

164. Hallar las líneas en las cuales la longitud de la subtangente es constante e igual a k.

165. Mostrar que las únicas líneas en las cuales la longitud de la normal es una magnitud constante son las circunferencias con centros en el eje Ox.

166. Hallar las líneas en las cuales la longitud de la tangente es una magnitud constante a.

167. Mostrar que el área S limitada por la tractriz (véase la respuesta al problema 166) y el eje de las abscisas es finita.

168. Supongamos que la tangente a la curva $r = r(\varphi)$ en el punto M corta la recta que pasa por el polo y es perpendicular al radio vector del punto de tangencia en el punto T y a la normal, en el punto N. Demostrar que las

longitudes de la tangente polar MT, de la normal polar MN, de la subtangente polar OT y de la subnormal polar ON se expresan por las fórmulas

$$|MT| = \left|\frac{r}{r'}\right| \sqrt{r^2 + r'^2}, \qquad |MN| = \sqrt{r^2 + r'^2},$$

$$|OT| = \frac{r^2}{|r'|}, \qquad |ON| = |r'|.$$

169. Hallar curvas en las cuales la longitud de la subtangente polar es constante e igual a k.

170. Hallar las curvas en las cuales la longitud de la subnormal polar es constante.

171. Hallar las curvas en las cuales la longitud de la normal polar es constante e igual a k.

172. Demostrar que la longitud del segmento de una tangente a la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

comprendido entre los ejes de las coordenadas, es igual a a.

173. Mostrar que las tangentes a la lemniscata de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ trazadas en los extremos de la cuerda que pasa por el polo del sistema polar de coordenadas, son paralelas.

174. Demostrar que cada tangente corta la astroide en dos puntos en los cuales las tangentes se intersecan en un punto que se encuentra en la circunferencia circunscrita cerca de la astroide.

175. Para que dos líneas tengan en un punto común una tangencia de orden no inferior al primero, es necesario y suficiente que en el punto indicado tengan una tangente común. Demuéstrese esto.

176. Demostrar que la línea $y = e^{hx} \operatorname{sen} mx$ es tangente a cada una de las líneas $y = e^{hx}$ o $y = e^{-hx}$.

177—178. Hallar el orden de tangencia en el origen de las coordenadas de las líneas siguientes:

(177) $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{tg} x.$

(178) $y = x^3, \quad y = x \operatorname{sen} x.$

179. Demostrar que las líneas

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = x^4 - \frac{1}{6} x^3 + x$$

tienen en el origen de las coordenadas una tangencia de tercer orden.

180. Averiguar qué orden de tangencia tienen las líneas

$$x^2+y^2-6x-6y+10=0, \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}-2=0$$
$$(x>0,\ y>0)$$

en el punto A (1, 1).

181. Hallar la ecuación de una parábola de la forma $y=x^2+ax+b$ que es tangente a la circunferencia x^2+ $+y^2=2$ en el punto M (1, 1).

182. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene con la parábola $y=x^2$ en el origen de coordenadas una tangencia de segundo orden.

183. Plantear la ecuación de la parábola que tiene con la línea $y=\ln x$ en el punto M (1, 0) el orden más alto de tangencia.

184. Hallar la línea $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ que tiene con la línea $y=f(x)$ en el punto A $(0, f(0))$ una tangencia de orden n.

185. Encontrar las ecuaciones: a) de una elipse, b) de una hipérbola y c) de una parábola, cuyos vértices coinciden con el vértice A $(\pi R, 2R)$ de la cicloide $x=R(t-$ $-\operatorname{sen} t)$, $y=R(1-\cos t)$ y que tienen con la cicloide el orden superior de tangencia.

§ 3. Asíntotas. Puntos singulares.

Investigación y construcción de las líneas (curvas)

Si una línea (curva)

$$x=x(t), \quad y=y(t) \tag{1}$$

permite una asíntota para $t\to t_0$, cuya ecuación es $Y=$ $=kX+b$, entonces

$$k=\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}, \qquad b=\lim_{t\to t_0}(y(t)-kx(t)).$$

Si la línea (curva) (1) admite una asíntota vertical para $t\to t_0$, entonces la ecuación de esta última tiene la forma

$x = a$, donde

$$a = \lim_{t \to t_0} x(t), \qquad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty.$$

Supongamos que una curva está dada por la parametrización $r = r(t)$ y $M = r(t_0)$ es un punto suyo tal, que $r'(t_0) = 0$. A este punto M lo llamaremos *irregular*.

Sea $r^{(p)}(t_0)$ la primera derivada distinta del cero y sea $r^{q}(t_0)$ la primera entre las derivadas no colineales al vector $r^{(p)}(t_0)$. Entonces son posibles los casos siguientes

1) p es impar, q es par;
2) p es impar, q es impar;
3) p es par, q es impar;
4) p es par, q es par.

En el primer caso la imagen de una curva en el entorno del punto M tiene la misma forma que en el entorno de un

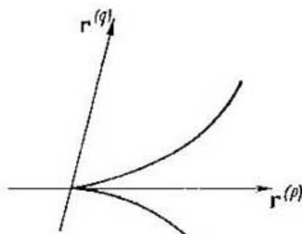


Fig.

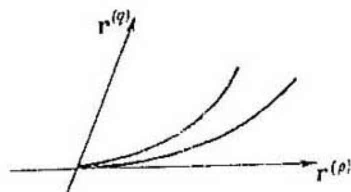


Fig. 2

punto regular. En el segundo caso el punto M es un *punto de inflexión*. En el tercer caso el punto M se llama *punto de retroceso de primer género*. En su entorno una curva se comporta del modo que se muestra en la fig. 1. En el cuarto caso el punto M se denomina *punto de retroceso de segundo género*. En su entorno una curva tiene una forma tal como se indica en la fig. 2.

Supongamos que una figura plana l definida por la ecuación

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

donde F es una función suave, posee las propiedades:

a) existen los puntos $M_1, \ldots, M_k$ de la figura l tales que la figura $l_1 = \setminus \{M_1, \ldots, M_k\}$ es una línea;

b) ninguna de las figuras $l_1 \cup \{M_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ es una línea.

Entonces la figura l se llama *línea de puntos singulares* $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Singulares pueden ser sólo tales puntos en los cuales $F_x(x, y) = 0$, $F_y(x, y) = 0$. Un punto sin-

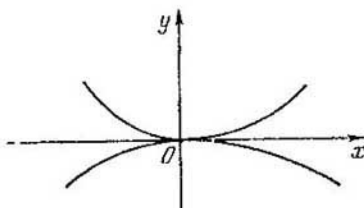


Fig 3

gular M de la línea (2) se denomina *punto singular doble*, si en él al menos una de las segundas derivadas parciales de la función $F(x, y)$ es distinta de cero.

Si por un punto singular doble M pasa una línea elemental que pertenece a la línea (2) y en este punto $F_{yy} \neq 0$, entonces el coeficiente angular k de la tangente a esta línea elemental se halla de la ecuación $F_{xx} + 2F_{xy}k + F_{yy}k^2 = 0$.

Si en el punto singular doble se cumple la condición $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0$, entonces en el entorno de este punto se pueden destacar dos líneas elementales que pasan por el mismo. Un punto así se llama *punto múltiple*. Si $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0$ en el punto M, entonces en cierto entorno suyo, además de este mismo punto, no existen otros puntos que satisfagan a la ecuación (2). Un punto así se dice *aislado*. Si $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0$ en el punto M, éste puede ser punto de retroceso de primero o segundo género o *punto autotangencial*. En este último caso en cierto entorno del punto la línea tiene una forma tal como se muestra en la fig. 3.

Investigar una línea, esto quiere decir averiguar el conjunto de las propiedades más importantes de la misma que

permitan construirla con exactitud suficiente. Entre las propiedades más importantes se pueden citar la presencia o ausencia de puntos singulares, puntos de inflexión, asíntotas, puntos múltiples, puntos en los cuales las tangentes son paralelas a los ejes de coordenadas y en los cuales la línea corta estos ejes.

186—191. Hallar las asíntotas de las líneas definidas por las ecuaciones en forma explícita:

(186) $y=\frac{2}{x-3}$. (187) $y=\frac{5}{x^2-16}$.

(188) $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$. (189) $y=\frac{x^2-4x+7}{x}$.

(190) $y=\frac{x^2}{x+2}$. (191) $y=\frac{x^3+1}{x}$.

192—194. Hallar las asíntotas de las curvas representadas por las ecuaciones en forma paramétrica:

(192) $x=\frac{2t}{(t-1)(t-2)}$, $y=\frac{t^2}{(t-1)(t-3)}$.

(193) $x=\frac{2t-1}{t^2-1}$, $y=\frac{t^2}{t-1}$.

(194) $x=\frac{t^3}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

195—197. Hallar las asíntotas de las líneas definidas por las ecuaciones implícitas:

(195) $xy^2-y^2-4x=0$.

(196) $xy^2=x^2+2x-\frac{5}{4}$.

(197) $(x^2-y^2)(x-y)=1$.

198—199. Hallar las asíntotas de las curvas definidas por las ecuaciones en coordenadas polares:

(198) $r=\frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}+l$ (*concoide de Nicomedes*).

(199) $r=\frac{2a\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\varphi}$ (*cisoide de Diocles*).

200—204. Hallar los puntos singulares de las líneas definidas por las ecuaciones siguientes:

(200) $y^2=x^3+x^2$. (201) $x^2=y^2+x^4$.

(202) $y^2 = x^3 - x^2$. (203) $x^2y^2 = x^2 + y^2$.

(204) $4y^2 = x + 5x^4$.

205—209. Hallar los puntos singulares y escribir las ecuaciones de las tangentes en los mismos para las líneas siguientes:

(205) $(x^2 + y^2)\, x - 2ay^2 = 0$ (*cisoide de Diocles*).

(206) $(x^2 + y^2)\,(y - a)^2 - l^2y^2 = 0$ (*concoide de Nicomedes*).

(207) $(2a - x)\, y^2 = x\,(x - a)^2$ (*estrofoide*).

(208) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2\,(x^2 - y^2)$ (*lemniscata de Bernoulli*).

(209) $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2\,(x^2 + y^2)$ (*cardioide*).

210—212. ¿Existen la tangente y la normal en los puntos indicados de las líneas siguientes?

(210) $y = x \operatorname{sen}(1/x)$ en el punto $x = 0$.

(211) $y = x\,(1 + e^{1/x})^{-1}$ en el punto $x = 0$.

(212) $y = (1 + e^{1/(x-1)})^{-1}$ en el punto $x = 1$.

213. Mostrar que las coordenadas del punto de inflexión de la línea definida por la ecuación $F(x, y) = 0$ satisfacen a la ecuación

$$F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0.$$

214. Hallar la ecuación que determina los puntos de inflexión de la curva representada por la ecuación $r = r(\varphi)$ en coordenadas polares.

215—222. Investigar y construir las líneas definidas por las ecuaciones en la forma explícita:

(215) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. (216) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

(217) $y = \dfrac{x^3}{2\,(x+1)^2}$. (218) $y = \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$.

(219) $y = \sqrt{\dfrac{125 - x^3}{3x}}$. (220) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

(221) $y = e^{-x^2}$. (222) $y = e^{1/x}$.

223—238. Investigar y construir las imágenes de las curvas dadas por las ecuaciones paramétricas:

(223) $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at}{1+t^3}$ (*folio de Descartes*)

(224) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t(1-t)}{1+t^2}$.

(225) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t^3}{1+t^2}$.

(226) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$.

(227) $x=t^2$, $y=\frac{2}{3}t(3-t^2)$.

(228) $x=\frac{t^2}{1-t}$, $y=\frac{t^3}{1-t^2}$.

(229) $x=\frac{t^2}{1-t^3}$, $y=\frac{t^3}{1-t^3}$.

(230) $x=4t^2$, $y=3t(t^2+1)$.

(231) $x=t^4$, $y=t^2-t^5$.

(232) $x=\frac{t^5}{10(1-t)}$, $y=t^3$.

(233) $x=\frac{t}{1-t^2}$, $y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$.

(234) $x=t^2$, $y=t^4+t^5$.

(235) $x=\frac{5t^2}{1+t^5}$, $y=\frac{5t^3}{1+t^5}$.

(236) $x=\frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y=\frac{(t-2)^3}{t-1}$.

(237) $x=\frac{4t}{1-t^4}$, $y=\frac{4t^2}{1-t^4}$.

(238) $x=2\operatorname{sen} t$, $y=\frac{2\cos^2 t}{2+\cos t}$.

239—274. Investigar y construir las líneas (con puntos singulares) definidas por las ecuaciones:

(239) $x^3-y^2+1=0$.

(240) $xy^2-y^2-4x=0$.

(241) $x(x^2+y^2)-y^2+x=0.$

(242) $xy^2=x^2+2x-\frac{5}{4}.$

(243) $x^4+y^4=a^4.$

(244) $x^4-4x^2y^2-6x^2-4y^2=0.$

(245) $(x^2-y^2)^2=2x.$

(246) $(x^2-y^2)(x-y)=1.$

(247) $(x-y)xy+x+y=0.$

(248) $x^2y^2+y=1.$

(249) $x^3+xy^2-x^2-y^2=0.$

(250) $x^2+y^2=x^2y^2.$

(251) $x^4-y^4+x^2+2y^2=0.$

(252) $x^3-xy^2+x^2+y^2=0.$

(253) $(x^2-y^2)^2=a^2(x^2+y^2).$

(254) $xy^2=-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2.$

(255) $x(x^2-3y^2)-4(x^2+y^2)=0.$

(256) $x^4+y^4=x^2+y^2.$

(257) $x^3+xy^2+x^2-y^2=0.$

(258) $x^4+y^4+x^2-y^2=0.$

(259) $xy^2=(x-1)^2.$

(260) $x^4+y^4-2xy=0.$

(261) $x^2=y^2+x^4.$

(262) $(x+1)(x+2)y^2=x^2.$

(263) $y^2=x^3-2x^2+x.$

(264) $(x^2+y^2)^2=xy.$

(265) $x^3+y^3-x^2=0.$

(266) $x^3-27(x-y)^2=0.$

(267) $x^3-xy^2+ay^2=0.$

(268) $x^5-x^4+4x^2y-4y^2=0.$

(269) $x^4-x^2y+y^3=0.$

(270) $x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0$.

(271) $x^4 + y^4 = 8xy^2$.

(272) $x^6 - x^4 + y^2 = 0$.

(273) $x^4 - y^4 + xy = 0$.

(274) $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$.

275—281. Investigar y construir las imágenes de las curvas definidas por las ecuaciones en coordenadas polares (a veces generalizadas):

(275) $r = \operatorname{tg} (\varphi/2)$.

(276) $r^2 = a^2\varphi$ $(a \neq 0)$ (*espiral de Fermat*).

(277) $r^2\varphi = a^2$, $a \neq 0$ (*bastón*).

(278) $r^2 = a^2\varphi^3$, $a \neq 0$ (*espiral de Galileo*).

(279) $r = a + \dfrac{l}{\varphi}$, $a \geqslant 0$, $l > 0$, $\varphi > 0$.

(280) $r = a \operatorname{sen} (\varphi/2)$, $a > 0$.

(281) $r = a \operatorname{sen} 3\varphi$, $a > 0$ (*rosa de tres pétalos*).

§ 4. Familia de líneas. Envolvente

Sea dada la ecuación de una familia monoparamétrica de líneas

$$F(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

donde C es un parámetro. El conjunto de todos los puntos que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$F(x, y, C) = 0, \quad F_C(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

se llama *discriminante de una familia* (1).

Si F_x y F_y en los puntos del discriminante no se anulan simultáneamente, entonces el discriminante coincide con la *envolvente de la familia*, o sea, con una línea tal, que en cada punto suyo toque cierta línea de la familia. En el caso contrario el discriminante no puede ser envolvente. Este caso requiere una investigación suplementaria.

El discriminante de una familia representado por una ecuación en forma vectorial $r = r(t, C)$, se define por el

sistema de ecuaciones

$$r = r(t, C) \quad r_t \times r_C = 0.$$

282—284. Investigar las familias de líneas y trazar las figuras:

(282) $C^2x^2 + y^2 = Cx$.

(283) $x^2 + 2Cy = 2xy$.

(284) $x = \cos u \operatorname{ch} v$, $y = \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v$ para a) $v = \text{const}$, b) $u = \text{const}$.

285. Demostrar que cada línea de la familia $\varphi(x, y) = a$ es ortogonal a toda línea de la familia $\psi(x, y) = b$ en el punto común a ambas, si se cumple la condición

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

286. Mostrar que la familia de líneas ortogonales a las líneas de la familia $\varphi(x, y) = a$ se define por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{dy}{\partial\varphi/\partial y}.$$

287. Hallar la familia de líneas ortogonales a un haz de rectas.

288. Hallar la familia de líneas ortogonales a la familia de circunferencias tangentes al eje Ox en el origen de coordenadas.

289. Hallar la familia de líneas ortogonales a la familia de parábolas $y^2 = 2ax$.

290. Hallar la familia de líneas ortogonales a la familia de circunferencias que pasan por dos puntos fijos.

291—299. Hallar la envolvente de las familias siguientes de líneas (con puntos singulares):

(291) $(x - C)^2 + y^2 = a^2$.

(292) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$.

(293) $x \cos C + y \operatorname{sen} C - p = 0$.

(294) $y = (x - C)^3$.

(295) $y^2 - (x - C)^3 = 0$.

(296) $y^3 - (x - C)^2 = 0$.

(297) $3(y - C)^2 - 2(x - C)^3 = 0$.

(298) $(1 - C^2)x + 2Cy - a = 0$.

(299) $C^2(x - a) - Cy - a = 0$.

300. Hallar la envolvente de la familia de rectas que forman con los ejes de coordenadas triángulos de área constante S.

301. La circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ es envolvente de la familia de rectas $Ax + By + C = 0$. ¿A qué relación deben satisfacer los coeficientes A, B, C?

302. Hallar la ecuación de la envolvente de una familia de rectas sobre las cuales está el segmento de longitud constante a si los extremos de este último se deslizan por los ejes del sistema rectangular de coordenadas.

303. Hallar la envolvente de una familia de rectas que son los lados de un ángulo recto que se desplaza por el plano de modo que uno de sus lados pase por un punto fijo F y el ángulo recto circunscriba: a) una recta; b) una circunferencia.

304. Una recta gira con velocidad angular constante alrededor de un punto que se mueve uniformemente por otra segunda recta. Hallar la envolvente de esta familia de rectas.

305. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias de radio r cuyos centros circunscriben una circunferencia de radio R.

306. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias construidas, como en los diámetros, sobre los radios vectores focales de la parábola dada.

307. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias construidas, como en los diámetros, sobre las cuerdas focales de la parábola $y^2 = 2px$.

308. Se da una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En las cuerdas paralelas a uno de los ejes de simetría, como en los diámetros, se construyen circunferencias. Hallar la envolvente de cada familia de circunfencias.

309. Sobre las cuerdas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ paralelas a uno de los ejes de coordenadas se construyen, como en los diámetros, circunferencias. Hallar la envolvente de cada familia.

310. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias construidas, como sobre los diámetros, sobre las cuerdas de la parábola $y^2 = 2px$ que son perpendiculares al eje de esta última.

311. Se da una familia de parábolas de parámetro p los ejes de las cuales son paralelos a Ox y los vértices circunscriben una parábola $y^2 = 2qx$. Hallar la envolvente de esta familia.

312. Hallar las condiciones a las cuales deben satisfacer los puntos de la envolvente de la familia de líneas $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, donde α y β están vinculados por la relación $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

313. Hallar la envolvente de la familia de líneas $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$, donde $p + q = 1$.

314. Hallar la envolvente de la familia de rectas $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, los parámetros α, β están vinculados por la relación $\alpha^m + \beta^m - a^m = 0$, $a = \text{const}$. Señalar los casos para $m = 2, 1, -2$.

315. Desde el punto dado, bajo diferentes ángulos al horizonte en un plano vertical y con la misma velocidad inicial v_0, se arrojan puntos materiales. Hallar la envolvente de sus trayectorias (parábola de seguridad).

316. Los radios de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se proyectan sobre los ejes de las coordenadas. Sobre las proyecciones, como sobre los semiejes, se construyen elipses. Encontrar la envolvente de esta familia de elipses.

§ 5. Longitud de un arco. Curvatura

La longitud del arco de una curva definida por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$
$$y = y(x),$$
$$r = r(\varphi)$$

se calcula por las fórmulas

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

$$s=\int_{x1}^{x2}\sqrt{1+y^2}\,xd,$$

$$s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi,$$

respectivamente.

La curvatura de una curva se calcula por las fórmulas

$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

$$k=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}},$$

respectivamente.

La circunferencia osculatriz de una curva en el punto dado tiene con la curva una tangencia no inferior a la de segundo orden. El centro de la circunferencia osculatriz se llama también *centro de curvatura de la curva en el punto dado*. Su radio denominado también *radio de curvatura de la curva en el punto dado* se encuentra por la fórmula $R=1/k$. El círculo limitado por la circunferencia osculatriz se llama frecuentemente círculo de curvatura de la curva.

317—322. Encontrar la longitud del arco comprendido entre dos puntos arbitrarios M_1 y M_2 de las curvas siguientes:

(317) $y=x^{3/2}$. (318) $y=\ln x$.

(319) $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. (320) $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$.

(321) $x=a(\cos t+t\operatorname{sen} t)$, $y=a(\operatorname{sen} t-t\cos t)$.

(322) $x=a(\ln\operatorname{tg}(t/2)+\cos t)$, $y=a\operatorname{sen} t$.

323—328. Encontrar la longitud del arco comprendido entre los puntos indicados de las curvas siguientes:

(323) $y=\ln\cos x,\ x_1=0,\ x_2=\pi/3$.

(324) $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-\sqrt{x}$, puntos de intersección con el eje Ox.

(325) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x,\ x_1=1,\ x_2=4.$

(326) $y=\ln\sec x,\ x_1=-\pi/3,\ x_2=\pi/3.$

(327) $x=t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t,\ y=2\operatorname{ch}t,\ t_1=0,\ t_2=2.$

(328) $x=8at^3,\ y=3a(2t^2-t^4),\ t_1=0,\ t_2=\sqrt{2}.$

329. Hallar la longitud del arco de la parábola $r=a\sec^2(\varphi/2)$, cortado por el eje Oy.

330. Hallar la longitud de una onda de una cicloide.

331. Hallar la longitud de una rama de una epicicloide (hipocicloide) (véanse los problemas 80, 81).

332—335. Hallar la longitud de toda la curva:

(332) $x=a\cos^3 t,\quad y=a\operatorname{sen}^3 t.$

(333) $r=a(1+\cos\varphi).$

(334) $r=a\cos^4(\varphi/4).$ (335) $r=a\operatorname{sen}^3(\varphi/3).$

336. Hallar la longitud del arco de la primera vuelta de la espiral de Arquímedes $r=a\varphi$.

337. Mostrar que la longitud del arco de la espiral logarítmica $r=ca^{\varphi}$ a partir de un punto arbitrario hasta el polo, es igual a la longitud de la tangente polar trazada con respecto a la espiral en este punto.

338. Hallar la ecuación de una línea, cuya longitud del arco, medida entre cierto punto fijo A y un punto arbitrario M, es proporcional al coeficiente angular de la tangente trazada en el extremo del arco.

339. Demostrar que la longitud del arco de una catenaria $y=a\operatorname{ch}(x/a)$ a partir de su vértice hasta cierto punto es igual a la proyección de la ordenada de este punto sobre la tangente trazada en este punto.

340. Mostrar que el área limitada por una catenaria, dos ordenadas de sus puntos y por el eje de las abscisas, es proporcional a la longitud del arco correspondiente, además, como coeficiente de proporcionalidad sirve el parámetro a de la catenaria.

341. Demostrar que el producto de las longitudes de arcos medidas entre el vértice de una catenaria y los puntos de tangencia de dos tangentes recíprocamente perpendiculares, es una magnitud constante.

342. Encontrar la parametrización natural de una circunferencia.

343. Encontrar la parametrización natural de la catenaria

$$y = a \operatorname{ch}(x/a).$$

344—353. Hallar la curvatura de las curvas siguientes:

(344) $y = \operatorname{sen} x$. (345) $y = a \operatorname{ch}(x/a)$.

(346) $y^2 = 2px$. (347) $x = t^2$, $y = t^3$.

(348) $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.

(349) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.

(350) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

(351) $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

(352) $r = a\varphi$. (353) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

354. Hallar la curvatura de la línea definida por la ecuación

$$F(x, y) = 0.$$

355—356. Hallar la curvatura de las siguientes líneas:

(355) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(356) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

357. Calcular la curvatura de la línea $y = x^4$ en el punto $O(0, 0)$.

358. Las líneas son dadas por su ecuación diferencial $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$. Hallar la curvatura de las mismas.

359. Demostrar que en un punto arbitrario de la línea es válida la igualdad

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2h}{\Delta s^2},$$

donde h es la distancia comprendida desde el punto de la línea para el valor del parámetro $s + \Delta s$ hasta la tangente trazada en el punto de la línea para el parámetro s.

360. Demostrar que el radio de curvatura de la cardioide $r = 2a(1 - \cos \varphi)$ en un punto cualquiera, es igual a 2/3 de la longitud de la normal en el mismo punto. Señalar el método de construcción del centro de curvatura para cualquier punto de una cardioide.

361. Demostrar que el radio de curvatura de la parábola $y = x^2/2p$ es igual a $R = p/\cos^3 \alpha$, donde α es el ángulo de inclinación de la tangente con respecto al eje de las abscisas.

362. Demostrar que el radio de curvatura de la espiral logarítmica $r = ca^{\varphi}$ en un punto cualquiera es igual a la longitud de la normal polar para este punto. Utilizando esta propiedad, mostrar un método de construir la circunferencia osculatriz en cualquier punto de la espiral logarítmica.

363. Calcular el radio de curvatura y señalar el método de construir el centro de curvatura en un punto arbitrario de la trayectoria $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \operatorname{sen} t$.

364. Demostrar que el segmento que une un punto arbitrario de una cicloide con el centro de curvatura, correspondiente a este punto, se biseca por la base de la cicloide. Señalar el método respectivo de construir el centro de curvatura para cualquier punto de una cicloide.

365. Mostrar que la ordenada de un punto cualquiera de una catenaria es media proporcional entre su parámetro y el radio de curvatura en este punto.

366. Mostrar que el radio de curvatura de la lemniscata de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ en cualquier punto suyo es tres veces menor que la longitud de la normal polar en este punto. Basándose en esta propiedad, señálese el método de construir el centro de curvatura en un punto arbitrario de una lemniscata.

367. Señalar el método geométrico de construcción de los centros de curvatura correspondientes a los vértices de una elipse.

368. Escribir las ecuaciones de circunferencias osculatrices en los vértices $A(a, 0)$, $B(0, b)$ de una elipse.

369. Escribir la ecuación de una circunferencia osculatriz de la línea $y = \text{sen}\, x$ en el punto A $(\pi/2, 1)$.

370. Hallar la circunferencia osculatriz de una hipérbola equilátera $xy = 1$ cuyo radio tiene el valor mínimo.

371—373. Hallar sobre las curvas puntos en que la curvatura toma el valor extremo (vértices de las curvas):

(371) $y = e^x$.

(373) $r = a\, \text{sen}^3 (\varphi/3)$.

(372) $\begin{cases} x = at - d\, \text{sen}\, t, \\ y = a - d \cos t. \end{cases}$

374. Para que dos líneas en un punto común tengan una tangencia no inferior al segundo orden es necesario y suficiente que tengan la tangente común y los vectores de curvatura iguales. Demuéstrese esto.

375. Mostrar que en el punto de una línea en el cual el radio de curvatura tiene el máximo o el mínimo, la línea tiene con la circunferencia osculatriz una tangencia no inferior al tercer orden.

376. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia osculatriz de la parábola $y^2 = 2px$. ¿En qué punto de la parábola la circunferencia tiene con la misma una tangencia de tercer orden?

377. Supongamos que las líneas l_1 y l_2 que se tocan en el punto M se encuentran en el entorno de este punto por un mismo lado con respecto a la tangente y $0 < k_1 < k_2$, donde k_1, k_2 son las curvaturas de las líneas en el punto M. Demostrar que en el entorno del punto M la línea l_1 envuelve la línea l_2.

378. Si en un punto A el radio de curvatura tiene el máximo, entonces la línea en el entorno del punto A se encuentra dentro del círculo de curvatura. Demuéstrese esto.

379. Si en un punto A la curvatura tiene un mínimo, entonces la línea en el entorno del punto A se encuentra fuera del círculo de curvatura. Demuéstrese esto.

380. Hallar una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que tenga con la sinusoide $y = \text{sen}\, x$ en el punto A $(\pi/2, 1)$ comunes la tangente y la curvatura.

381. La circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ es osculatriz en el punto A $(1, 2)$ a una parábola, cuyo eje es paralelo al eje Ox. Hallar la ecuación de esta parábola.

§ 6. Evolutas y evolventes. Ecuaciones intrínsecas

La evoluta, o sea, la figura constituida por los centros de curvatura de una curva definida por las ecuaciones (2) del § 1 tiene las ecuaciones

$$X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

Llámase *evolvente* de la curva dada γ a la curva γ^* con respecto a la cual γ es evoluta. Si la curva γ está definida por la ecuación $r = r(s)$, entonces la ecuación de la familia de sus evolventes tiene la forma $\rho = r + (\lambda - s)\, t$, donde t es el vector unitario de la tangente a la curva γ y λ es un parámetro arbitrario.

Vamos a atribuir a la curvatura de la curva un signo determinado, calculándola por la fórmula $k = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{\alpha}$, donde α es el ángulo que la tangente a la curva forma con el eje Ox. En lo sucesivo los puntos colocados encima de la letra siempre designan la diferenciación del parámetro en cuya calidad se toma la longitud del arco. Se denominan ecuaciones intrínsecas de la curva a las ecuaciones de la forma

$$k = k(s), \quad F(k, s) = 0,$$
$$k = k(t) \quad s = s(t).$$

Si se dan las ecuaciones intrínsecas de una curva, entonces la parametrización de la curva puede ser definida de la forma

$$x = \int \cos \alpha(s)\, ds, \quad y = \int \operatorname{sen} \alpha(s)\, ds.$$

382. ¿Cómo es la evoluta de una circunferencia?

383—392. Encontrar las ecuaciones y trazar las evolutas de las curvas siguientes:

(383) $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.

(384) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$. (385) $y = x^2$.

(386) $y = x^{2k}$, k es un número natural mayor que la unidad.

(387) $y = x^{2k+1}$, k es un número natural cualquiera.

(388) $y = \ln x$. (389) $y = \operatorname{sen} x$.

(390) $y = \operatorname{tg} x, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2.$

(391) $x = a\,(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t), \qquad y = a \operatorname{sen} t.$

(392) $r = a\,(1 + \cos \varphi).$

393. Demostrar que la evoluta de una cicloide es una cicloide congruente a la dada.

394. Mostrar que la evoluta de una astroide es una astroide semejante a la dada, con la razón de semejanza igual a 2, vuelta con respecto a la dada en un ángulo $\pi/4$.

395. Mostrar que la evoluta de una espiral logarítmica $r = ca^{\varphi}$ es una espiral logarítmica obtenida de la dada, haciéndola girar alrededor del polo en cierto ángulo.

396. Hallar tal condición para el parámetro a de la espiral logarítmica $r = ca^{\varphi}$ que la evoluta de la espiral coincida con la misma espiral.

397. Encontrar las ecuaciones de evolventes de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y trazar el dibujo.

398. Encontrar la ecuación y trazar el dibujo de la evolvente de la catenaria $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ que pasa por su vértice.

399. Encontrar las ecuaciones de evolventes de la parábola

$$x = t, \quad y = t^2/4.$$

400—402. Hallar las longitudes de arcos de las curvas citadas a continuación, representando estas curvas en forma de evolutas de ciertas otras curvas.

(400) De la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

(401) De una onda de la cicloide $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

(402) De la cardioide $r = a\,(1 + \cos \varphi)$.

403—407. Encontrar las ecuaciones intrínsecas de las curvas:

(403) $y = x^{3/2}$. (404) $y = \ln x$.

(405) $x = a\,(\cos t + t \operatorname{sen} t), \qquad y = a\,(\operatorname{sen} t - t \cos t).$

(406) $x = a\,(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \operatorname{sen} t$.

(407) $r = a\,(1 + \cos \varphi)$.

408—411. ¿Qué curvas se definen por las ecuaciones intrínsecas siguientes:

(408) $k = a$. (409) $R = as$.

(410) $R = (a^2 + s^2)/a^2$. (411) $s^2 + R^2 = 16a^2$.

412—415. Encontrar las parametrizaciones de las curvas para las cuales:

(412) $R \operatorname{sen}^3 \alpha = a$. (413) $R = ae^{\alpha}$.

(414) $R = a\alpha$. (415) $s = a \operatorname{tg} \alpha$.

416. Demostrar que la cicloide es una *línea isócrona*. Esto quiere decir que si la onda de la cicloide se coloca en el plano vertical con el vértice A hacia abajo, entonces el tiempo empleado por un punto material para la traslación por la cicloide bajo la acción de la fuerza de gravedad de la Tierra a partir de cierta posición inicial M hasta el vértice A, no depende de la posición inicial del punto material.

CAPÍTULO 3

Curvas y líneas espaciales

§ 7. Ecuaciones de curvas y de líneas

La parametrización

$$r = r(t) \qquad (1)$$

de una curva (o de una línea) en $\mathbb{R}^3$ la llamaremos *ecuación vectorial paramétrica* de esta curva (de esta línea). Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (2)$$

se denominan *paramétricas*.

Sean $F(x, y, z)$ y $G(x, y, z)$ dos funciones suaves y l es un conjunto de soluciones del sistema

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0. \qquad (3)$$

Si en el punto $M \in l$ los vectores $\operatorname{grad} F = (\partial_x F, \ \partial_y F, \ \partial_z F)$ y $\operatorname{grad} G = (\partial_x G, \ \partial_y G, \ \partial_z G)$ no son colineales, entonces en el entorno del punto M cada una de las ecuaciones (3) define una superficie y la intersección de estas superficies es una línea que se contiene en el conjunto l.

417. Un cilindro circular está definido con respecto al sistema rectangular de coordenadas por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Supongamos que un punto M se mueve por este cilindro de modo que su proyección sobre el eje Oz se desplace por este eje con velocidad constante, y su proyección sobre el plano xOy gire uniformemente por la circunferencia. La trayectoria del punto M se llama *hélice*. Escribir las ecuaciones paramétricas de la hélice y hallar sus proyecciones sobre los planos de las coordenadas.

418. Un punto M se mueve a lo largo de la generatriz de un cilindro circular con velocidad proporcional al camino

recorrido; con ello el cilindro gira en torno a su propio eje con velocidad angular constante. Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto M.

419. Hallar la curva cuya imagen es la intersección de la esfera de radio R y del cilindro circular de diámetro R, una de las generatrices del cual pasa por el centro de la esfera. Esta curva se llama *curva de Viviani*.

420. La recta OL, no perpendicular al eje Oz, gira uniformemente alrededor de éste con una velocidad angular constante ω. El punto M se mueve por la recta OL: a) con una velocidad proporcional a la distancia OM del punto movible hasta el punto O; b) con velocidad constante. En el primer caso el punto M circunscribe una *espiral cónica* y en el segundo, una *hélice cónica*. Escribir las ecuaciones paramétricas de estas líneas.

421. Los ejes de dos cilindros circulares de radios a y b se intersecan bajo el ángulo recto. En la intersección de los cilindros se forman dos líneas cerradas cuyo conjunto se llama *bicilíndrica*. Escribir las ecuaciones implícitas de una bicilíndrica, señalar una de sus parametrizaciones. ¿Qué pasa si $a = b$?

422. Mostrar que la imagen de la curva $x = at \cos t$, $y = at \operatorname{sen} t$, $z = a^2t^2/2p$ se encuentra sobre el paraboloide de rotación y su proyección sobre xOy es una espiral de Arquímedes.

423. Hallar las proyecciones de la imagen de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ sobre los planos de coordenadas.

424. Mostrar que la imagen de la curva $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $z = ct$ se encuentra sobre un cilindro hiperbólico. Hallar sus proyecciones sobre los planos de las coordenadas.

425. Hallar la proyección sobre el plano xOy de la línea de intersección del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y del plano $x + y - z = 0$.

426. Demostrar que la proyección sobre el plano yOz de la línea de intersección del paraboloide elíptico $x = y^2 + z^2$ y del plano $x - 2y + 4z - 4 = 0$ es una circunferencia de radio $R = 3$ con centro en el punto M $(0, 1, -2)$.

427. Mostrar que la imagen de la curva $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $z = a \cos 2t$ se encuentra en la parte acotada del cilindro cuya directriz es una astroide y cuya generatriz es paralela al eje Oz.

428. Representar la imagen de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$ en forma de intersección de dos superficies.

429. Mostrar que la imagen de la curva $x = \operatorname{sen} 2\varphi$, $y = 1 - \cos 2\varphi$, $z = 2\cos\varphi$ se encuentra sobre una esfera y es la intersección de los cilindros parabólico y circular.

430. Mostrar que la imagen de la curva $x = a \operatorname{sen}^2 t$, $y = b \operatorname{sen} t \cos t$, $z = c \cos t$ se encuentra sobre un elipsoide.

431. Mostrar que la imagen de la curva $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = ct$ se encuentra sobre un cono circular.

432. ¿Qué resulta de la intersección de los hiperboloides de una hoja $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 - x^2 = 1$?

§ 8. Sistema de referencia de Frenet. Longitud de un arco

Para una curva (línea) representada en el espacio R^3 los vectores del sistema de referencia de Frenet se designan con t, n y b, con ello los ejes de coordenadas y los planos tienen nombres especiales: el eje del vector t es *tangente*, el eje del vector n se llama *normal principal*, el eje del vector b se llama *binormal*, el plano de los vectores n y t es *osculador*, el plano de los vectores n y b se denomina *normal* y el plano de los vectores t y b se denomina *rectificante*.

Las ecuaciones de la tangente a la curva definida por las ecuaciones (1) y (2) del § 7 tienen la forma

$$R = r + \tau r',$$

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'},$$

respectivamente, donde R es el radio vector del punto corriente de la tangente y X, Y, Z son las coordenadas del vector R.

Ecuaciones de la normal principal:

$$R = r + \lambda\,((r' \times r'') \times r'),$$

o bien

$$X = x + \lambda\left(z' \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\right),$$

$$Y = y + \lambda \left(x' \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z' \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \right),$$

$$Z = z + \lambda \left(y' \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x' \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} \right).$$

Ecuaciones de la binormal:

$$R = r + \lambda\ (r' \times r''),$$

o bien

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Ecuación del plano osculador:

$$(R - r)\, r' r'' = 0,$$

o bien

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuación del plano normal:

$$(R - r)\, r' = 0,$$

o bien

$$(X - x)\, x' + (Y - y)\, y' + (Z - z)\, z' = 0.$$

Ecuación del plano rectificante:

$$(R - r)\, r'\ (r' \times r'') = 0,$$

o bien

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Los vectores unitarios de la tangente, de la normal principal y de la binormal se hallan por las fórmulas

$$t = \frac{r'}{|r'|}, \quad n = \frac{(r' \times r'') \times r'}{|(r' \times r'')|\ |r'|}, \quad b = \frac{r' \times r''}{|r' \times r''|}.$$

La longitud del arco de la línea, o el paramétro natural, se determina por la fórmula

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

433—435. Encontrar las ecuaciones de las tangentes a las curvas en los puntos indicados:

(433) $x=\sec t,\ y=\operatorname{tg} t,\ z=at$ para $t=\pi/4$.

(434) $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t^2$ para $t=1$.

(435) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\operatorname{sen} t,\ z=e^t$ para $t=0$.

436. Encontrar las ecuaciones de la tangente a la curva $x=a(t-\operatorname{sen} t),\ y=a(1-\cos t),\ z=4a\operatorname{sen}(t/2)$ en el punto $t=\pi/2$. ¿Qué ángulo forma esta tangente con el eje Oz?

437. ¿En qué puntos la tangente a la curva $x=3t-t^3$, $y=3t^2$, $z=3t+t^3$ es paralela al plano $3x+y+z+2=0$?

438. Encontrar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal de la hélice $x=2\cos t$, $y=2\operatorname{sen} t$, $z=4t$ en el punto $t=0$.

439. Se da la curva $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. Escribir las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal en el punto $t=1$. ¿Qué línea resulta de la intersección de las tangentes con el plano xOy?

440. Demostrar que la línea $a=e^{t/\sqrt{2}}\cos t$, $y=e^{t/\sqrt{2}}\operatorname{sen} t$, $z=e^{t/\sqrt{2}}$ se encuentra sobre el cono $x^2+y^2=z^2$ y corta sus generatrices bajo el ángulo de 45°.

441. Escribir las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva de Viviani (véase el problema 419).

442. Llámase *indicatriz esférica* de una línea a la figura compuesta por los extremos de los vectores unitarios trazados a partir del origen de las coordenadas. Hallar la indicatriz esférica de una hélice.

443. Demostrar que si todos los planos normales de una línea espacial pasan por un punto fijo, entonces la línea se encuentra sobre la esfera (tales líneas se llaman *esféricas*).

444. Encontrar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal de una línea definida por la intersección de dos superficies:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix} = 2.$$

445. Escribir las ecuaciones de la tangente y del plano normal de la línea $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ en un punto arbitrario.

446. Hallar las ecuaciones del plano normal en un punto arbitrario de la línea $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ $(y \neq \pm 1)$.

447. Mostrar que los planos normales de la curva

$$x = a \operatorname{sen}^2 t, \quad y = a \operatorname{sen} t \cos t, \quad z = a \cos t$$

pasan por el origen de las coordenadas.

448. Sean $r = r(s)$ la parametrización natural de una curva, π una recta que pasa por el punto $M_0(s_0)$ de la curva y $d(\Delta s)$ la distancia comprendida entre el punto $M(s_0 + \Delta s)$ y la recta π. Para que la recta π sea tangente a la curva $r = r(s)$ en el punto M_0 es necesario y suficiente que $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{d(\Delta s)}{\Delta s} = 0$. Demuéstrese esto.

449. Demostrar que el plano osculador de la curva birregular $r = r(t)$ en el punto dado $M_0(t_0)$ se puede determinar por cualquiera de las condiciones siguientes:

a) El plano que pasa por el punto M_0 y tiene los vectores directores $r'(t_0)$ y $r''(t_0)$.

b) Sean π el plano que pasa por la tangente a la curva en el punto M_0, $\rho = \rho(s)$ la parametrización natural de la curva, el punto M_0 corresponde al valor del parámetro s_0, y sea $d(\Delta s)$ la distancia del punto $M(s_0 + \Delta s)$ al plano π. El plano π es el plano osculador de la curva en el punto M_0 si y sólo si

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s^2} = 0.$$

c) Un plano que tenga con la curva en el punto M_0 una tangencia no inferior al segundo orden (la definición de la tangencia de una curva con la superficie véase en el § 11).

450. Demostrar que si todos los planos osculadores de una línea birregular pasan por un punto fijo, entonces esta línea es plana.

451. Hallar los planos osculadores de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ que pasan por el punto M_0 (2, —1/3, —6) dado.

452. Mostrar que una recta trazada desde un punto arbitrario M de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en paralelo al plano $z = 0$ hasta el encuentro con el eje Oz está en el plano osculador de la curva en el punto M.

453. Escribir la ecuación del plano osculador de la curva $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ en el punto $t = 0$.

454. En las binormales de la curva $x = \cos \alpha \cos t$, $y = \cos \alpha \operatorname{sen} t$, $z = t \operatorname{sen} \alpha$, $\alpha = \text{const}$ están trazados, en el sentido positivo, segmentos de longitud constante igual a la unidad. Escribir la ecuación del plano osculador de la curva formada por los extremos de estos segmentos.

455. Encontrar la ecuación del plano osculador de la línea de intersección de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y de un cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 3$ en el punto M (2, 1, 2).

456. Demostrar que la imagen de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = 2t$ se encuentra en la superficie $x^2 + y^2 - e^z = 0$ y el plano osculador de la curva coincide con el plano tangente de la superficie.

457—458. Encontrar las ecuaciones de la normal principal y de la binormal de las curvas siguientes en los puntos indicados:

(457) $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^t \quad$ para $t = 0$.

(458) $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \quad$ para $t = 1$.

459. Desde cada punto de la curva $x = a (t - \operatorname{sen} t)$, $y = a (1 - \cos t)$, $z = 4a \operatorname{sen} (t/2)$ se ha trazado, sobre su normal principal en el sentido del vector $\boldsymbol{n}$, un segmento de longitud $a \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 (t/2)}$. Demostrar que la línea constituida por los extremos de estos segmentos es sinusoide.

460. Hallar los puntos sobre la curva $x = 2/t$, $y = \ln t$, $z = -t^2$ en los cuales la binormal es paralela al plano $x - y + 8z + 2 = 0$.

461. En las binormales de una hélice se han trazado segmentos de igual longitud. Demostrar que los extremos de estos segmentos están sobre otra hélice.

462. Encontrar los vectores unitarios de la tangente, de la normal principal y de la binormal de la curva $x = t \operatorname{sen} t$, $y = t \cos t$, $z = te^t$ en el origen de coordenadas.

463—464. Hallar los vectores unitarios de la tangente, de la normal principal y de la binormal en un punto arbitrario de las curvas siguientes:

(463) $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad z = \cos 2t.$

(464) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \cos(t/2)$.

465. Demostrar que los vectores t, n, b de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto $O(0, 0, 0)$ coinciden con los vectores unitarios de los ejes de las coordenadas.

466. Encontrar las ecuaciones de la tangente, del plano normal, de la binormal, del plano osculador, de la normal principal y del plano rectificante de la hélice

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt.$$

Demostrar que la normal principal corta el eje de la hélice en ángulo recto y la binormal forma con él un ángulo constante. Hallar los vectores del sistema de referencia de Frenet.

467. Escribir las ecuaciones vectoriales de las curvas circunscritas por los puntos de intersección de las tangentes, de las normales principales y de las binormales de una curva $r = r(s)$ con el plano xOy.

468. Hallar la longitud del arco de una hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, desde el punto de intersección con el plano xOy hasta un punto arbitrario M.

469. Escribir la parametrización natural de una hélice.

470. Hallar la longitud del arco de una espira de la curva

$x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \cos(t/2)$,
comprendido entre dos puntos de intersección suyos con el plano xOz.

471. Hallar la longitud del arco de una línea $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$, comprendido entre los planos $y = a/3$, $y = 9a$.

472. Mostrar que la curva cerrada $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$, $z = \cos 2t$ tiene la longitud $s = 10$.

473. Hallar la longitud del arco de una curva $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$, comprendido entre los puntos que corresponden a los valores del parámetro 0 y t.

474. Hallar la expresión de la diferencial de longitud del arco de una curva en coordenadas cilíndricas.

475. Hallar la expresión de la diferencial de longitud del arco de una curva en coordenadas esféricas.

§ 9. Fórmulas de Frenet. Curvatura y torsión. Ecuaciones intrínsecas

Las fórmulas de Frenet de una curva birregular orientada en el espacio $\mathbb{R}^3$ tienen el aspecto

$$\frac{dt}{ds} = kn, \quad \frac{dn}{ds} = -kt + \varkappa b, \quad \frac{db}{ds} = -\varkappa n,$$

donde k y $\varkappa$ son las *curvaturas primera* y *segunda* llamadas *curvatura* y *torsión*, respectivamente.

La curvatura de una curva definida por las ecuaciones (1) y (2) del § 7 se calcula por las fórmulas

$$k = |r' \times r''|/|r'|^3$$

o bien

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

Fórmulas para calcular la torsión:

$$\varkappa = (r'r''r''')/(r' \times r'')^2,$$

o bien

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}.$$

En particular, si en calidad de parámetro se toma un parámetro natural s, entonces

$$k=|\ddot{r}|,\quad k=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2},\quad \varkappa=(\dot{r}\,\ddot{r}\,\dddot{r})/\ddot{r}^2,$$

$$\varkappa=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix}}{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2},$$

donde los puntos designan las derivadas del parámetro s. Las ecuaciones $k=k(s)$, $\varkappa=\varkappa(s)$ se llaman *ecuaciones intrínsecas* de la línea.

476. Comprobar que para la curva $r=r(s)$ se cumplen las relaciones siguientes:

$$|\dddot{r}|^3=k^4+k^2\varkappa^2+\dot{k}^2,$$

$$\dot{r}\cdot\ddot{r}=0,\qquad \dot{r}\cdot\dddot{r}=-k^2,\qquad \ddot{r}\cdot\dddot{r}=k\dot{k}.$$

477. Demostrar que las fórmulas de Frenet

$$\dot{t}=kn,\qquad \dot{n}=-kt+\varkappa b,\qquad \dot{b}=-\varkappa n$$

se pueden escribir de la forma $\dot{t}=\omega\times t$, $\dot{n}=\omega\times n$, $\dot{b}=\omega\times b$. Hallar el vector ω (*vector de Darboux*) y averiguar su sentido cinemático.

478. Demostrar que

a) $tb\dot{b}=\varkappa$.

b) $\dot{b}\,\ddot{b}\,\dddot{b}=\varkappa^5\left(\frac{k}{\varkappa}\right)^{\cdot}$.

c) $\dot{t}\,\ddot{t}\,\dddot{t}=k^5\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^{\cdot}$.

479. Para que una línea sea una recta o un subconjunto abierto de la misma, es necesario y suficiente que $k\equiv 0$. Demuéstrese esto.

480. Para que una línea birregular sea plana es necesario y suficiente que $\varkappa\equiv 0$. Demuéstrese esto.

481. Demostrar que en un punto M_0 la curvatura de la línea L es igual a la curvatura de la proyección L^* de la línea L sobre su plano osculador en el punto M_0.

482—483. Demostrar que para las curvas siguientes la curvatura y la torsión son iguales:

(482) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(483) $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3.$

484. Hallar la curvatura y la torsión de la hélice

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt.$$

485. Hallar la curvatura de la hélice cónica $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = at$ en el origen de coordenadas.

486—489. Hallar la curvatura y la torsión de las curvas siguientes:

(486) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(487) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}t.$

(488) $x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2.$

(489) $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad z = \cos 2t.$

490. Hallar para cuáles a y b la torsión de la curva $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = bt$ en todos los puntos es igual a su curvatura.

491. Hallar los puntos sobre la curva $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$, $z = \cos 2t$ en los cuales la curvatura tiene el valor mínimo (local).

492. ¿En qué puntos el radio de curvatura de la curva $x = a (t - \operatorname{sen} t)$, $y = a (1 - \cos t)$, $z = 4a \cos (t/2)$ alcanza el mínimo local?

493. Demostrar que el radio de curvatura de una espiral cónica $x = a \cos \varphi \cdot e^{h\varphi}$, $y = a \operatorname{sen} \varphi \cdot e^{h\varphi}$, $z = be^{h\varphi}$ es proporcional a la distancia entre un punto de la espiral y el eje del cono.

494—495. Demostrar que las curvas siguientes son planas y encontrar las ecuaciones de los planos en los cuales están sus imágenes:

(494) $x = \frac{1+t}{1-t}, \quad y = \frac{1}{1-t^2}, \quad z = \frac{1}{1+t}.$

(495) $x = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $y = a_2t^2 + b_2t + c_2$, $z = a_3t^2 + b_3t + c_3$.

496. Hallar una función $f(t)$ tal que la curva $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = f(t)$ sea plana.

497. Llámase *hélice generalizada* a una línea espacial cuyas tangentes forman un ángulo constante con el sentido fijo. Demostrar que una línea será una hélice generalizada si, y sólo si, se cumple una de las condiciones siguientes:

a) las normales principales son perpendiculares al sentido fijo;

b) las binormales forman un ángulo constante con el sentido fijo;

c) la relación entre la curvatura y la torsión es constante.

498. Mostrar que la condición $\ddot{r}\,\dddot{r}\,r^{(4)} = 0$ es necesaria y suficiente para que una línea sea una hélice generalizada.

499. Demostrar que la línea $x^3 = 3y$, $2xy = 9z$ es una hélice generalizada.

500. Mostrar que la línea $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ es una hélice generalizada que está en la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al vector $\boldsymbol{a}$ (0, 1, 1).

501. Hallar las condiciones en las cuales la línea $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$ será una hélice generalizada.

502. Si todos los planos normales de una línea birregular contienen un vector constante $\boldsymbol{e}$, entonces la línea es plana. Demuéstrese esto.

503. Si todos los planos osculadores de una línea birregular son perpendiculares a cierta recta fija, entonces la línea es plana. Demuéstrese esto.

504. Si entre los puntos de dos líneas se puede establecer una correspondencia tal que en los puntos correspondientes las tangentes sean paralelas, entonces las relaciones entre la torsión y la curvatura en estos puntos son de módulos iguales. Demuéstrese esto.

505. Llámase *línea de Bertrand* a una línea tal, cuyas normales principales son simultáneamente normales principales de cierta segunda línea distinta de la primera. Demostrar que la línea de Bertrand se caracteriza por la dependencia $\lambda k + \mu \varkappa = 1$, donde λ, μ son const.

506. Mostrar que el ángulo comprendido entre las tangentes en los puntos correspondientes de líneas de Bertrand es constante.

507. Demostrar que la distancia entre dos puntos correspondientes de líneas de Bertrand es constante.

508. Demostrar que una línea de curvatura constante es línea de Bertrand. Mostrar que en este caso la línea corres-

pondiente tiene la misma curvatura y que cada una de estas líneas se compone de los centros de curvatura de la otra. Mostrar que en los puntos correspondientes las tangentes son perpendiculares.

509. Entre los puntos de dos líneas se ha establecido una correspondencia biunívoca de modo que las tangentes, las normales principales y las binormales en los puntos correspondientes sean paralelas. Demostrar que $\frac{k^*}{k}=\frac{ds}{ds^*}=\frac{\varkappa^*}{\varkappa}$, donde k, $\varkappa$, s son la curvatura, la torsión y la longitud del arco de una línea y k^*, $\varkappa^*$, s^* son las magnitudes respectivas de la otra línea.

510. Llamaremos *evolvente de la línea no plana* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ a la línea $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - s\mathbf{t}$. Expresar la curvatura y la torsión de esta línea por la curvatura y la torsión de la línea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Demostrar que si la línea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una hélice generalizada, entonces la línea $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - s\mathbf{t}$ es plana.

511. Mostrar que si la curvatura y la torsión de una línea son constantes la línea es una hélice.

512. Conociendo la curvatura k y la torsión $\varkappa$ de una hélice, encontrar sus ecuaciones paramétricas.

513. Mostrar que entre todas las líneas de Bertrand sólo para la hélice existe un conjunto infinito de líneas dotadas de normales principales comunes.

514—515. Encontrar las ecuaciones intrínsecas de las curvas siguientes:

(514) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(515) $x = ct, \quad y = \sqrt{2c} \ln t, \quad z = ct^{-1}.$

516. Una línea está definida por las ecuaciones intrínsecas $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$. Mostrar que las ecuaciones intrínsecas de una línea simétrica a la dada con respecto al origen de las coordenadas serán $k = k(s)$, $\varkappa = -\varkappa(s)$.

517. Demostrar que en el caso de una tangencia de dos líneas no inferior al tercer orden las torsiones en su punto común son iguales. ¿Es cierto lo inverso?

518. Hallar el orden de pequeñez de la distancia mínima entre las tangentes de una línea con respecto a la distancia entre los puntos de tangencia. Resolver un problema análogo para las normales principales y las binormales.

519. Demostrar que la línea y su circunferencia osculatriz en el punto dado tienen una tangencia no inferior al segundo orden.

520. ¿En qué circunstancias el centro de curvatura de una hélice se encuentra sobre el mismo cilindro que la hélice en cuestión?

521. La esfera, que tiene con la curva en un punto dado una tangencia no inferior al tercer orden, se llama *esfera osculatriz* en este punto (la definición de la tangencia de una línea con la superficie véase en el § 11). Demostrar que si la curva está definida por la ecuación $r = r(s)$, entonces el radio vector del centro de la esfera osculatriz se define por la fórmula $r_c = r + Rn + \frac{\dot{R}}{\varkappa} b$ y el radio de la esfera osculatriz, por la fórmula $R_c = \sqrt{R^2 + \frac{\dot{R}^2}{\varkappa^2}}$, donde $R = \frac{1}{k}$.

522—523. Hallar el radio de la esfera osculatriz en un punto arbitrario de las curvas siguientes:

(522) $x = e^t, \qquad y = e^{-t}, \qquad z = \sqrt{2}t.$

(523) $x = e^t \operatorname{sen} t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = e^t.$

524. Mostrar que dos curvas que tienen en cierto punto una tangencia no inferior al tercer orden poseen en este punto una misma esfera osculatriz.

525. Si el radio de una esfera osculatriz es constante, entonces la línea es *esférica* (se encuentra sobre la esfera) o tiene una curvatura constante. Demuéstrese esto.

526. Hallar el conjunto de los centros de las esferas osculatrices de una hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$.

527. Demostrar que el plano osculador de una curva corta su esfera osculatriz por la circunferencia osculatriz.

CAPÍTULO 4

Superficies

§ 10. Ecuaciones de una superficie

Sean S una superficie y (U, r) su parametrización.

La ecuación

$$r = r(u, v) \tag{1}$$

se llama *ecuación vectorial de la región $r(U)$ sobre la superficie S*. Si existe una función vectorial (1) sobre el conjunto $W = \{(u, v)\}$ tal, que la imagen $r(W)$ sea igual a S, entonces (1) se denomina *ecuación vectorial de la superficie*, aunque el par (W, r) puede o no ser la parametrización de S. Si $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{2}$$

se llaman *ecuaciones paramétricas de la superficie*.

La parametrización de una superficie se representa con frecuencia en forma $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, donde f es una función suave. En este caso la ecuación

$$z = f(x, y) \tag{3}$$

se denomina *ecuación de la superficie en forma explícita*.

Supongamos que $F(x, y, z)$ es una función suave y S, el conjunto de soluciones de la ecuación

$$F(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

Si en el punto $M \in S$ el vector grad $F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F)$ es distinto de cero, entonces S en un entorno del punto M es una superficie y (4) se llama *ecuación implícita de la superficie*.

528. En el plano xOz está dada la línea $x = f(u)$, $z = g(u)$ que no corta el eje Oz. Hallar la parametrización de la superficie obtenida al girar esta línea alrededor del eje Oz.

529. Escribir las ecuaciones de un *toro* que se obtiene al girar la circunferencia

$$x = a + b\cos u, \quad y = 0, \quad z = b \operatorname{sen} u \quad (b < a)$$

alrededor del eje Oz.

530. Escribir las ecuaciones de una *catenoide* que se obtiene al girar la catenaria $x = a \operatorname{ch}(u/a)$, $y = 0$, $z = u$ alrededor del eje Oz.

531. Escribir las ecuaciones de la *seudoesfera* que se obtiene al girar la tractriz $x = a \operatorname{sen} u$, $y = 0$, $z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$ en torno al eje Oz.

532. Escribir las ecuaciones paramétricas del paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

tomando por líneas de coordenadas sus generatrices rectilíneas. ¿Cómo se escribirán estas ecuaciones si la ecuación de la superficie se toma en la forma $z = pxy$?

533. Escribir las ecuaciones paramétricas de una superficie cilíndrica cuyas generatrices sean paralelas al eje Oz y la directriz se define por las ecuaciones $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = 0$.

534. Escribir las ecuaciones paramétricas de los cilindros hiperbólico y parabólico.

535. Escribir la ecuación de una superficie cilíndrica para la cual la línea $\rho = \rho(u)$ es directriz y las generatrices son paralelas al vector e.

536. Escribir las ecuaciones paramétricas de una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al vector $a(1, 2, 3)$ y la directriz está definida por las ecuaciones $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$.

537. Escribir la ecuación implícita de una superficie cilíndrica con la línea directriz $x = \cos u$, $y = \operatorname{sen} u$, $z = 0$ y con las generatrices rectilíneas paralelas al vector $a(-1, 3, -2)$.

538. Demostrar que la ecuación de una superficie cilíndrica cuyas directrices son paralelas al vector $a(l, m, n)$, tiene la forma $f(nx - lz, ny - mz) = 0$.

539. Hallar la ecuación de una superficie cilíndrica cuya directriz es la línea $x^2 + y^2 = ay$, $z = 0$ y las generatrices son paralelas al vector $a(l, m, n)$.

540. Dada la superficie

$$x = 3u + v^2 + 1, \quad y = 2u + v^2 - 1, \quad z = -u + 2v.$$

a) Mostrar que esta superficie es cilíndrica.
b) Escribir la ecuación de cualquiera de sus líneas directrices.
c) Hallar la generatriz rectilínea que pasa por el punto M $(u = 2, \ v = 3)$.

541. Dados el punto $M(a, b, c)$ y la línea L

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u).$$

Escribir en la forma paramétrica e implícita las ecuaciones de un cono con el vértice en el punto M y con la línea directriz L.

542. Encontrar la ecuación de un cono formado por las rectas que pasan por el punto $M(a, b, c)$ y cortan la parábola $y^2 = 2px$, $z = 0$.

543. Encontrar la ecuación de un cono que tiene el vértice en el punto $M(-1, 0, 0)$ y está circunscrito alrededor del paraboloide $2y^2 + z^2 = 4x$.

544. Se da la superficie $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$. Comprobar si los puntos $A(4, 2, 3)$, $B(1, 4, -2)$ le pertenecen a ella.

545. ¿Qué superficie es definida por las ecuaciones

$$x = u + \operatorname{sen} v, \quad y = u + \cos v, \quad z = u + a?$$

546. Hallar la ecuación implícita de una superficie definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + a \cos u \cos v, \quad y = y_0 + b \cos u \operatorname{sen} v,$$
$$z = z_0 + c \operatorname{sen} u.$$

547. Mostrar que las ecuaciones

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad z = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

y

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = u^2$$

representan la misma superficie.

548. Dada la ecuación del cono $r = ue(v)$, $|e| = |e'| = 1$. ¿Qué significado geométrico tienen los parámetros u y v?

549—551. Averiguar la forma de las líneas de coordenadas sobre los planos:

(549) $x = u$, $y = v$, $z = 0$.

(550) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = 0$.

(551) $x = \cos u \operatorname{ch} v$, $y = \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v$, $z = 0$.

552. Mostrar que las ecuaciones paramétricas de un hiperboloide de una hoja se puede representar en la forma

$$x = a\,\frac{uv+1}{u+v}, \quad y = b\,\frac{u-v}{u+v}, \quad z = \frac{uv-1}{u+v}.$$

¿Cuáles son las líneas de coordenadas de la superficie para la parametrización indicada?

553. Escribir las ecuaciones paramétricas de un cilindro circular de modo que en calidad de líneas de coordenadas sirvan: a) hélices y circunferencias; b) hélices y generatrices rectilíneas; c) dos familias de hélices.

554. Escribir las ecuaciones paramétricas de una figura formada por las tangentes a la línea dada $\rho = \rho(u)$.

555. Escribir las ecuaciones paramétricas de una figura formada por las tangentes a la hélice

$$x = a \cos u, \quad y = a \operatorname{sen} u, \quad z = bu.$$

¿Es superficie esta figura?

556. Llámase *helicoide de forma general* a una figura formada por cierta línea (perfil) que gira en torno al eje y simultáneamente avanza en la dirección de este eje, además, las velocidades de estos movimientos son proporcionales. Encontrar las ecuaciones de un helicoide de forma general.

557. El *helicoide* de cuyo perfil sirve una recta que corta el eje se llama *directo* si la recta es perpendicular al eje y *oblicuo* si la recta no es perpendicular al eje. Escribir las ecuaciones de estos helicoides tomando por eje de rotación el eje Oz.

558. Hallar la ecuación de una superficie formada por las normales principales de una hélice.

559. Llámase *conoide directo* a la figura obtenida por la rotación de una recta alrededor del eje ortogonal a la misma y por la traslación simultánea de esta recta a lo largo del eje. Escribir la ecuación de un conoide cuyo eje coincide con el eje Oz.

560. Escribir en forma implícita la ecuación de un conoide directo en el cual el desplazamiento a lo largo del eje Oz se determina por la fórmula $z = a \operatorname{sen} 2v$, donde v es la velocidad angular de rotación de la recta.

561. Escribir las ecuaciones paramétricas de la superficie $x^2z^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Demostrar que esto es un conoide directo.

562. Una circunferencia de radio a se desplaza de modo que su centro se mueve por una línea dada $\rho = \rho(s)$ y el plano, en el cual ella se encuentra, es en cada momento el plano normal de esta línea. Escribir la ecuación de la figura circunscrita por la circunferencia (la superficie de este género se llama *tubular*).

563. La superficie que admite la parametrización de la forma $r = r_1(u) + r_2(v)$, donde r_1, r_2 son funciones vectoriales suaves, se llama *superficie de traslación*. Demostrar que la superficie de traslación se puede obtener con el avance de cierta línea.

564. Mostrar que la superficie constituida por los centros de segmentos, cuyos extremos pertenecen a dos líneas dadas, es una superficie de traslación.

565. Demostrar que una parte del helicoide directo

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = av$$

para $u \leqslant c$ (donde c es cierto número positivo) es superficie de traslación.

566. Mostrar que paraboloides elíptico e hiperbólico son superficies de traslación.

567. Demostrar que las coordenadas x, y, z, de un punto arbitrario de una superficie de segundo orden, siempre se pueden expresar por funciones racionales de dos parámetros u y v.

§ 11. Plano tangente y normal a una superficie. Superficies regladas. Tangencia de una línea a una superficie

Las ecuaciones del plano tangente correspondientes a las representaciones de las superficies (1), (2), (3), (4) del § 10 tienen, respectivamente, la forma

$$(R - r)\, r_u r_v = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

donde $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$(X-x)F_x+(Y-y)F_y+(Z-z)F_z=0;$$

las ecuaciones de la normal:

$$R=r+\lambda(r_u\times r_v),$$

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X-x}{-p}=\frac{Y-y}{-q}=\frac{Z-z}{1}, \qquad \frac{X-x}{F_x}=\frac{Y-y}{F_y}=\frac{Z-z}{F_z}.$$

La superficie que admite la parametrización en la forma $R=r(u)+va(u)$, donde r y a son funciones vectoriales suaves se llama *reglada*. La línea de coordenadas $u=\text{const}$ es una recta o una parte suya y se denomina *generatriz*. La línea $r=r(u)$ se dice *directriz*. La superficie reglada se llama *desarrollable* si en todos los puntos de una generatriz arbitraria el plano tangente a la superficie es el mismo. La superficie reglada que no es desarrollable se llama *oblicua*.

Sea M cierto punto de una superficie reglada S y sea $\pi=\pi(u)$ la generatriz rectilínea que pasa por el punto M. Asignando al parámetro u cierto incremento Δu, obtendremos la generatriz rectilínea $\pi'=\pi'(u+\Delta u)$. Sea NN' la perpendicular común de las rectas π y π'. Si para $\Delta u\to 0$ el punto N tiende por la recta π a cierta posición límite, entonces este punto límite se llama *punto de garganta* de la generatriz π. El conjunto de todos los puntos de garganta de una superficie reglada S forma en el caso general una línea que se denomina *línea de garganta* (de estricción). La ecuación de la línea de garganta de una superficie reglada tiene la forma

$$\rho=r(u)-\frac{dr\cdot da}{(da)^2}a(u).$$

Supongamos que la curva

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \tag{1}$$

tiene con la superficie

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

un punto común $M(t_0)$. Examinemos la función

$$\Phi(t) = F(x(t), y(t), z(t)).$$

Cuando el punto $M(t)$ tiende por la curva (1) al punto $M(t_0)$, $\Phi(t)$ será una variable infinitamente pequeña si $t \to t_0$. Si el orden de pequeñez de esta magnitud con respecto a $t - t_0$ es igual a $k + 1$, entonces se dice que la curva (1) tiene con la superficie (2) una *tangencia de orden k*.

568. Si por el punto M de la superficie pasa una recta que descansa sobre la misma, entonces el plano tangente a la superficie en el punto M contiene la recta dada. Demuéstrese esto.

569. En la superficie $x = u + \cos v$, $y = u - \operatorname{sen} v$, $z = \lambda u$ se da el punto M $(u = 1, v = \pi/2)$.

a) Escribir las ecuaciones de las tangentes y de los planos normales a las líneas $u = 1$, $v = \pi/2$ en el punto M.

b) Hallar el ángulo comprendido entre las líneas $u = 1$, $v = \pi/2$.

c) Mostrar que la tangente a la línea $u = \operatorname{sen} v$ en el punto M es tangente a la línea $u = 1$ en el mismo punto.

570. Mostrar que la normal en un punto arbitrario de la superficie formada por las tangentes a una hélice forma un ángulo constante con el eje de la línea.

571. Escribir la ecuación del plano tangente a la superficie $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ en el punto $M(3, 5, 7)$.

572. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ en el punto M $(u = 2, v = 1)$.

573. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal en el punto $M(1, 3, 4)$ de la superficie $x = u$, $y = u^2 - 2uv$, $z = u^3 - 3u^2v$.

574. Dada la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u$, escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie y la ecuación de la tangente a la línea $u = 2$ en el punto M $(u = 2, v = \pi/4)$ de la misma.

575—578. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las superficies siguientes en los puntos indica-

dos:

(575) $z = x^3 + y^3$ en el punto M (1, 2, 9).

(576) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ en el punto M (3, 4, 12).

(577) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 4$ en el punto M (3, 1, -1).
$= 0$

(578) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$.

579. Escribir la ecuación del plano tangente a la seudoesfera

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$
$$z = a (\ln \operatorname{tg} (u/2) + \cos u).$$

580. Encontrar las ecuaciones del plano tangente y de la normal al helicoide directo

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = av.$$

Investigar el comportamiento de la normal al desplazarla a lo largo de las líneas de coordenadas.

581. Escribir la ecuación del plano tangente al toro

$$x = (7 + 5 \cos u) \cos v, \quad y = (7 + 5 \cos u) \operatorname{sen} v,$$
$$z = 5 \operatorname{sen} u$$

en el punto M (u, v) para el cual

$$\cos u = 3/5, \quad \cos v = 4/5 \quad (0 < u, \ v < \pi/2).$$

582. Trazar un plano tangente a la superficie $xyz = 1$ que sea paralelo al plano $x + y + z - 3 = 0$.

583. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $xyz = a^3$ forman con los planos de las coordenadas un tetraedro de volumen constante.[1]

584. Mostrar que el plano tangente en un punto arbitrario de un cono pasa por el vértice de este último.

585. Mostrar que todos los planos tangentes a la superficie $z = x^3 + y^3$ en los puntos M $(\alpha, -\alpha, 0)$ forman un haz de planos.

586. Hallar los puntos del toro

$$x = (a + b \cos u) \cos v \quad y = (a + b \cos u) \operatorname{sen} v,$$
$$z = b \operatorname{sen} u$$

en los cuales la normal es perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

587. Se da la superficie $x^n + y^n + z^n - d^n = 0$ y el punto $M(a, b, c)$ en la misma (a, b, c, d, son positivos). Mostrar que si A, B, C son los puntos en los cuales el plano tangente en el punto M corta los ejes Ox, Oy, Oz, entonces $\frac{a}{|OA|}+\frac{b}{|OB|}+\frac{c}{|OC|}=1$.

588. Mostrar que el plano tangente en un punto arbitrario de la superficie $f(x - az, y - bz) = 0$ es paralelo a una dirección fija.

589. Demostrar que un plano tangente a una superficie tubular (véase el problema 562) es paralelo a la línea tangente de la línea directriz, y que las normales del mismo son las normales de la línea directriz.

590. Mostrar que los planos tangentes de la superficie

$$z = x\varphi(y/x)$$

pasan por el origen de coordenadas.

591. Demostrar que los planos tangentes a la superficie de traslación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u) + \boldsymbol{r}_2(v)$ a lo largo de cada línea $u = \text{const}$ o $v = \text{const}$ son paralelos a cierta recta.

592. Una superficie S' se llama *paralela* a otra superficie S si esta consta de los extremos de segmentos de longitud constante trazados sobre las normales de la superficie S a partir de los puntos de esta superficie. Consideremos como puntos correspondientes de las superficies S y S' los extremos de los segmentos de los cuales se trata en la definición.

Mostrar que: a) los planos tangentes en los puntos correspondientes de las superficies paralelas S y S' son paralelos; b) la propiedad de paralelismo es recíproca (es decir, si S' es paralela a la S, entonces S es paralela a la S').

593. Supongamos que una superficie es una parte de la figura formada por las tangentes a la línea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. Escribir la ecuación del plano tangente en un punto arbitrario de la superficie. Investigar su comportamiento al desplazarse el punto de tangencia a lo largo de las generatrices rectilíneas de la superficie.

594. Demostrar que las superficies $z = \operatorname{tg}(xy)$, $x^2 - y^2 = a$ son ortogonales en los puntos de su intersección.

595—597. Demostrar que las siguientes familias de superficies son ortogonales de par en par (λ, μ, ν son los pará-

metros de las familias):

(595) $4x + y^2 + z^2 = \lambda, \quad y = \mu z, \quad y^2 + z^2 = \nu e^x.$

(596) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \mu y,$
$x^2 + y^2 + z^2 = \nu z.$

(597) $xy = \lambda z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \mu,$
$x^2 + y^2 + z^2 = \nu (x^2 - y^2).$

598. Mostrar que el plano tangente trazado en cualquier punto de la línea $v = c$ sobre la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = f(v) + au$, pasa por una recta fija.

599. Demostrar que si todas las normales de una superficie pasan por un punto, entonces esta superficie es una esfera o una región en la esfera.

600. Demostrar que la normal de una superficie de rotación coincide con la normal principal del meridiano y corta el eje de rotación.

601. Si todas las normales de una superficie cortan la misma recta, entonces la superficie será superficie de rotación. Demostrar esto.

602. Demostrar que la superficie reglada $R = r(u) + va(u)$ es desarrollable si y sólo si

$$r'aa' = 0.$$

603. Demostrar que una superficie paralela a una desarrollable es también superficie desarrollable.

604. Demostrar que cualquier superficie desarrollable se puede dividir en las partes siguientes:

a) parte del plano;
b) parte del cilindro;
c) parte del cono;
d) parte de la figura constituida por las tangentes a cierta línea no plana. En este último caso la línea indicada se llama *arista de retroceso*.

605. Sea S una superficie desarrollable del tipo d) del problema 604. Demostrar que el plano tangente en un punto arbitrario de la superficie S coincide con el plano osculador de la arista de retroceso en el punto correspondiente.

606. Llámase *superficie de Catalán* a la superficie reglada oblicua, todas las generatrices de la cual son paralelas a cierto plano denominado *director*. Demostrar que las condiciones necesarias y suficientes para que la superficie

reglada

$$r = \rho(u) + va(u)$$

sea una superficie de Catalán son las siguientes:

$$aa'a'' = 0, \quad a'' \neq o.$$

607—610. Hallar la línea de garganta de las superficies siguientes:

(607) Del helicoide directo.

(608) Del hiperboloide de rotación de una hoja.

(609) De la superficie formada por las binormales de una línea espacial.

(610) De la superficie formada por las normales principales de una línea espacial.

611. Demostrar que la superficie formada por las normales trazadas en los puntos de una generatriz de una superficie reglada oblicua es un paraboloide hiperbólico o una parte del mismo.

612. Mostrar que la línea $yz = x$, $xz = y + 1$, tiene, con la superficie $z = xy$ una tangencia de segundo orden en el punto $M(0, -1, 0)$.

613. Hallar el orden de tangencia de la línea

$$x = t^3, \quad y = t^3 + 2t \quad z = t^2$$

con la superficie

$$x^2 + y^2 = x(y + z)$$

en el origen de coordenadas.

614. Una recta que tiene con una superficie de segundo orden una tangencia no inferior al segundo orden se encuentra completamente en esta superficie. Demuéstrese esto.

615. Si una línea en cada punto suyo tiene con un plano osculador una tangencia no inferior al tercer orden, entonces esta línea es plana. Demuéstrese esto.

616. Supongamos que la línea L tiene con la superficie S en el punto M_0 una tangencia de orden n. Mostrar que la proyección L' de la línea L sobre la superficie S es paralela a cierta dirección que no está en el plano tangente a S en el punto M_0 y tiene con la línea L en el punto M_0 una tangencia de orden n.

§ 12. Familia de superficies. Envolvente

Sea

$$F(x, y, z) = C \qquad (1)$$

la ecuación de una familia monoparamétrica de superficies. El conjunto de todos los puntos que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad \partial_C F(x, y, z, C) = 0 \qquad (2)$$

se llama *discriminante* de la familia (1).

Llámase *envolvente* de la familia (1) la superficie que en cada punto suyo toca cierta superficie de la familia (es decir, tiene con ella un punto común y un plano común tangente a ella). Una parte del discriminante, que es superficie, será envolvente. Los puntos de tangencia de la envolvente de una familia (1) con cierta superficie fija de la familia forman en el caso general una línea que se llama *característica* y se define por el sistema (2) siendo dado el valor C correspondiente a la superficie que se examina.

El conjunto de puntos que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad \partial_C F(x, y, z, C) = 0$$
$$\partial^2_{CC} F(x, y, z, C) = 0$$

se denomina *arista de retroceso de una envolvente*. Si una familia de características tiene una envolvente, entonces esta envolvente pertenece a la arista de retroceso.

Sea

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \qquad (3)$$

la ecuación de una familia biparamétrica de superficies. El conjunto de soluciones del sistema

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad \partial_{C_1} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$
$$\partial_{C_2} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$

se llama *discriminante* de la familia (3). La *envolvente* de la familia (3) se define del modo igual al indicado anteriormente.

617—619. Hallar la envolvente de una familia de superficies:

(617) $x^2 + y^2 + (z - C)^2 - 1 = 0$.

(618) $x + C^2y + z - 2C = 0$.

(619) $(x - C)^2 + (y - C)^2 + (z - C)^2 - C^2 = 0\ (C \neq 0)$.

620. Citar el ejemplo de una familia de superficies cuyo discriminante sea una línea.

621. Citar el ejemplo de una familia de superficies cuyo discriminante sea un punto.

622. Hallar la envolvente y las características de la familia de esferas

$$(x - C)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

¿Existe la arista de retroceso de la envolvente?

623. En las cuerdas de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

paralelas a uno de los ejes de simetría se construyen, como en diámetros, esferas. Hallar la envolvente de estas esferas. El mismo problema se plantea para la hipérbola.

624. Hallar la arista de retroceso de la envolvente de una familia de superficies

$$x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha + z = b\alpha,$$

donde $b =$ const, α es parámetro.

625. Hallar la envolvente de una familia de planos cada uno de los cuales forma con los planos de coordenadas el tetraedro de volumen dado V.

626. Encontrar la ecuación de una familia de esferas para la cual la superficie envolvente es un cono sin vértice.

$$x^2 + y^2 = a^2z^2 \quad (z \neq 0).$$

627. Hallar la envolvente de una familia de esferas de radio constante cuyos centros están en la línea dada $\rho = \rho\ (s)$ (*superficie tubular*).

628. Hallar la envolvente, las características y la arista de retroceso de una familia de esferas de radio a cuyos centros se encuentran sobre la circunferencia

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad z = 0.$$

629. Hallar la envolvente, las características y la arista de retroceso de la familia de superficies

$$[(x-C)^2+(y-R)^2+z^2-R^2]\times$$
$$\times[(x-C)^2+(y+R)^2+z^2-R^2]=0\ (y^2+z^2\neq 0).$$

630. Hallar la envolvente de planos osculadores de una línea espacial y sus características. ¿Existe la arista de retroceso de la envolvente?

631. Hallar la envolvente de planos normales de una línea espacial, sus características y la arista de retroceso.

632. Hallar la envolvente de planos rectificantes de una línea espacial, sus características y la arista de retroceso.

633. Hallar la envolvente de una familia de conos circulares iguales (con el ángulo de sección axial igual a 2α) que tienen el vértice en el origen de las coordenadas y tocan el plano $z=0$.

634. Demostrar que las superficies desarrollables y sólo ellas son envolventes de una familia monoparamétrica de planos.

635. La superficie desarrollable σ está cortada por una familia de planos paralelos. Demostrar que las evolutas de secciones también están sobre la superficie desarrollable.

636. Hallar la envolvente de una familia de esferas de radio constante a que tienen los centros en el plano $z=0$.

637. Si todos los planos tangentes de cierta superficie la tocan por líneas, entonces estas líneas son rectas o partes suyas. Demuéstrese esto.

638. Hallar la envolvente de una familia de planos para los cuales la suma de las distancias hasta n puntos fijos es constante.

§ 13. Primera forma cuadrática

Llámase *primera forma fundamental de la superficie* S en $\mathbb{R}^3$, y se designa con φ_1, al producto escalar inducido en cada espacio vectorial tangente de la superficie por el producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Así, pues, a cada par h, p de los vectores tangentes a la superficie (en un mismo punto) la forma φ_1 le pone en correspondencia el número $\varphi_1(h, p) = h\cdot p$. La forma cuadrática φ_1 correspondiente se denomina *primera forma cuadrática de la superficie* y se denota por ds^2

(así como por φ_1). La representación de la forma bilineal φ_1 es equivalente a la representación de la forma cuadrática ds^2. Para el vector tangente h a la superficie $ds^2(h) = \varphi_1(h, h) = h \cdot h = |h|^2$. Si (U, r) es la parametrización de una superficie y $\partial_u r$, $\partial_v r$ es la base movible, entonces las funciones

$$E(u, v) = \partial_u r(u, v) \cdot \partial_u r(u, v),$$

$$F(u, v) = \partial_u r(u, v) \cdot \partial_v r(u, v),$$

$$G(u, v) = \partial_v r(u, v) \cdot \partial_v r(u, v)$$

se llaman *coeficientes de la primera forma cuadrática (fundamental)*. Si h, p son los vectores tangentes a una superficie en el punto $r(u, v)$ y

$$h = h_1 \partial_u r(u, v) + h_2 \partial_v r(u, v),$$

$$p = p_1 \partial_u r(u, v) + p_2 \partial_v r(u, v)$$

(es decir, (h_1, h_2) son las coordenadas del vector h en la base movible y (p_1, p_2) son las coordenadas del vector p), entonces

$$ds^2(h) = E(u, v) h_1^2 + 2F(u, v) h_1 h_2 + G(u, v) h_2^2,$$

$$\varphi_1(h, p) = E(u, v) h_1 p_1 + F(u, v)(h_1 p_2 + h_2 p_1) + G(u, v) h_2 p_2.$$

Con frecuencia ds^2 se escribe de la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

teniendo en cuenta con ello que $du(h) = h_1$, $dv(h) = h_2$.

Si la línea en superficie está definida por las ecuaciones interiores $u = u(t)$, $v = v(t)$, entonces la longitud del arco de esta línea se encuentra por la fórmula

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))\, u'(t) \times v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2}\, dt.$$

Si φ es el valor del ángulo comprendido entre las líneas en la superficie (definidas por las ecuaciones interiores $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ y $u = u_2(t)$, $v = v_2(t)$) en el punto común con las coordenadas curvilíneas $(u_0, v_0) =$

$= (u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(t_0) v_2(t_0))$, entonces

$$\cos\varphi = \frac{1}{d_1 d_2}(E(u_0, v_0) u_1'(t_0) u_2'(t_0) + F(u_0, v_0)(u_1'(t_0) v_2'(t_0) + u_2'(t_0) v_1'(t_0)) + G(u_0, v_0) v_1'(t_0) v_2'(t_0)),$$

donde

$$d_1 = \sqrt{E(u_0, v_0)(u_1'(t_0))^2 + 2F(u_0, v_0) u_1'(t_0) v_1'(t_0) + G(u_0, v_0)(v_1'(t_0))^2},$$

$$d_2 = \sqrt{E(u_0, v_0)(u_2'(t_0))^2 + 2F(u_0, v_0) u_2'(t_0) v_2'(t_0) + G(u_0, v_0)(v_2'(t_0))^2}.$$

El área σ de una región cerrada D en la superficie, que es la imagen de una región cerrada D' con respecto a la función vectorial r (o sea, $r(D') = D$), se calcula por la fórmula

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

El difeomorfismo f de la superficie S sobre la superficie Q se llama *isometría* si la longitud del arco de una línea cualquiera l en la superficie S, entre los puntos M y N, es igual a la longitud del arco de la línea $f(l)$ en la superficie Q entre los puntos correspondientes. La superficie S se llama *aplicable* a la superficie Q si para todo punto $M \in S$ existe la isometría del entorno W del punto M en la superficie S sobre cierta parte de la superficie Q.

El difeomorfismo f de la superficie S sobre la superficie Q se denomina *aplicación conforme* si el ángulo comprendido entre dos líneas cualesquiera en la superficie S es igual al ángulo comprendido entre las líneas correspondientes en la superficie Q.

Sean (U, r_1) y (U, r_2) parametrizaciones de las superficies S y Q, respectivamente, y sea

$$f: r_1(U) \to r_2(U), \quad r_1(u, v) \to r_2(u, v)$$

la aplicación que pone en correspondencia los puntos con las mismas coordenadas curvilíneas. La aplicación f es isometría (conforme) si, y sólo si, los coeficientes de las primeras for-

mas cuadráticas de las superficies con respecto a las parametrizaciones indicadas coinciden (son correspondientemente proporcionales).

639—649. Hallar la primera forma cuadrática de las siguientes superficies de rotación:

(639) $x = f(u) \cos v$, $y = f(u) \operatorname{sen} v$, $z = g(u)$, o sea, la superficie de rotación con el eje de rotación Oz.

(640) $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \operatorname{sen} v$, $z = R \operatorname{sen} u$, o sea una esfera.

(641) $x = a \cos u \cos v$, $y = a \cos u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{sen} u$, o sea, un elipsoide de rotación.

(642) $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = a \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{sh} u$, o sea, un hiperboloide de rotación de una hoja.

(643) $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{ch} u$, o sea, un hiperboloide de rotación de dos hojas.

(644) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, o sea un paraboloide de rotación.

(645) $x = R \cos v$, $y = R \operatorname{sen} v$, $z = u$, o sea, un cilindro de sección circular.

(646) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = ku$ $(u \neq 0)$, o sea, un cono circular sin vértice.

(647) $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \operatorname{sen} v$, $z = b \operatorname{sen} u$, o sea un toro.

(648) $x = a \operatorname{ch}(u/a) \cos v$, $y = a \operatorname{ch}(u/a) \operatorname{sen} v$, $z = u$, o sea, un catenoide.

(649) $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = a (\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$ $(u \neq \pi/2)$, o sea una seudoesfera.

650. Hallar la primera forma cuadrática del helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$.

651. Hallar la primera forma cuadrática del helicoide de forma general $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $x = f(u) + av$.

652. La superficie S es una parte de la figura formada: a) por las tangentes, b) por las normales principales, c) por las binormales de una línea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, donde u es un parámetro natural. Hallar la primera forma cuadrática de la superficie S.

653. Hallar la primera forma cuadrática de la superficie

$$z = z(x, y).$$

654. Señalar qué forma cuadrática entre las citadas a continuación no puede servir en calidad de primera forma

cuadrática de cierta superficie:

a) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv + dv^2$;

b) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv + 4dv^2$;

c) $ds^2 = du^2 - 4du\,dv + 6dv^2$;

d) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv - 2dv^2$.

655. Hallar las fórmulas de transformación de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de la expresión

$$H = \sqrt{EG - F^2}$$

al pasar a un nuevo sistema curvilíneo de coordenadas.

656. Mostrar que, una vez escogidas correspondientes las coordenadas curvilíneas en la superficie de rotación, su primera forma cuadrática puede ser reducida a la forma

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2.$$

657. Una red de líneas de coordenadas en una superficie se llama *red de Chébishev* si los segmentos de líneas de coordenadas de una familia, comprendidos entre dos líneas de otra familia, tienen longitudes iguales. Demostrar que una red de líneas de coordenadas en superficie es red de Chébishev si, y sólo si, $\partial_v E = 0$, $\partial_v G = 0$.

658. La primera forma cuadrática de una superficie tiene la forma

$$ds^2 = du^2 + 2F\,du\,dv + dv^2.$$

¿Qué se puede decir en este caso de las coordenadas curvilíneas?

659. Reducir la primera forma cuadrática de una esfera, un toro, un catenoide y una seudoesfera a la forma

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + \tilde{G}(\tilde{u})\,d\tilde{v}^2.$$

660. Un sistema de coordenadas curvilíneas en superficie se llama *isotérmico* si la primera forma cuadrática de la superficie en estas coordenadas tiene la forma

$$ds^2 = \Lambda(u, v)\,(du^2 + dv^2).$$

Hallar las coordenadas isotérmicas sobre una seudoesfera.

661. Hallar el ángulo bajo el cual se cortan las generatrices rectilíneas del paraboloide hiperbólico $z = axy$.

662. Mostrar que las áreas de regiones en los paraboloides $z = a(x^2 + y^2)/2$ y $z = axy$ que se proyectan sobre la misma región del plano xOy son iguales.

663. Hallar las ecuaciones de líneas que cortan los meridianos de una superficie de rotación bajo un ángulo constante α (de una *loxodromia*).

664. Hallar la ecuación de las loxodromias en una esfera.

665. Si la familia de líneas en una superficie está definida por la ecuación diferencial $A\,du + B\,dv = 0$, entonces la ecuación de las trayectorias ortogonales, o sea, de las líneas que cortan las líneas dadas bajo el ángulo recto, tiene la forma

$$(BE - AF)\,du + (BF - AG)\,dv = 0.$$

Demuéstrese esto.

666. Hallar las trayectorias ortogonales de las generatrices rectilíneas de un cono.

667. La superficie S es una parte de la figura formada por las tangentes a cierta línea: Hallar las trayectorias ortogonales de las generatrices rectilíneas de la superficie S.

668. Encontrar la ecuación diferencial de las líneas que cortan las generatrices rectilíneas de la superficie S del problema 667 bajo un ángulo constante α.

669. Hallar la ecuación diferencial de trayectorias ortogonales de una familia de líneas $\varphi(u, v) = \text{const}$ en una superficie.

670. Hallar las trayectorias ortogonales de una familia de líneas $u + v = \text{const}$ que descansan en una esfera
$x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u \operatorname{sen} v$, $z = R\operatorname{sen} u$.

671. Hallar las trayectorias ortogonales de una familia de líneas $u = Ce^v$ que descansan sobre un helicoide oblicuo $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = u + v$.

672. Sobre un cono circular $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = u$, se examina una familia de líneas $v = u^2 + \alpha$, donde α es un parámetro. Hallar la familia de sus trayectorias ortogonales.

673. Escribir las ecuaciones de un helicoide oblicuo $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = u + v$, tomando las líneas $v = \text{const}$ y sus trayectorias ortogonales por líneas de coordenadas.

674. Deducir la condición de ortogonalidad de dos familias de líneas en una superficie, definidas por la ecuación diferencial

$$P(u, v)\,du^2 + Q(u, v)\,du\,dv + R(uv)\,dv^2 = 0.$$

675. Demostrar que sobre un helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$ la ecuación diferencial

$$du^2 - (u^2 + a^2)\,dv^2 = 0$$

define la red ortogonal.

676. En la superficie $z = axy$ hallar las trayectorias ortogonales de sus generatrices rectilíneas.

677. Demostrar que las líneas que en cada punto suyo biseccan los ángulos comprendidos entre las líneas de coordenadas se definen por las ecuaciones diferenciales

$$\sqrt{E}\,du \pm \sqrt{G}\,dv = 0.$$

678. Encontrar las ecuaciones de las líneas sobre un helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$, que biseccan los ángulos comprendidos entre las líneas de coordenadas.

679. Hallar las ecuaciones de las líneas en la esfera $x = a \cos u \operatorname{sen} v$, $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = a \cos v$, que biseccan los ángulos comprendidos entre las paralelas y los meridianos.

680. Hallar las ecuaciones de las líneas que biseccan los ángulos comprendidos entre las generatrices rectilíneas en cada punto de la superficie $z = axy$.

681. Dada la superficie

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = uv \quad (|u| + |v| \neq 0),$$

a) Hallar la primera forma cuadrática.

b) Calcular la diferencial de la longitud del arco para las líneas $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.

c) Calcular la longitud del arco de la línea $v = au$ entre los puntos de su intersección con las líneas $u = 1$, $u = 2$.

682. Hallar bajo qué ángulo se cortan las líneas $u + v = 0$, $u - v = 0$ sobre el helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$.

683. Hallar el perímetro y los ángulos interiores del triángulo $u = \pm av^2/2$, $v = 1$ que está en una superficie

en la cual

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

684. Hallar en la superficie con la primera forma cuadrática

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\,dv^2$$

la longitud del arco de la línea $u = v$ entre los puntos $M_1(u_1, v_1)$ y $M_2(u_2, v_2)$.

685. Hallar el ángulo comprendido entre las líneas $v = 2u$ y $v = -2u$ en la superficie que tiene la primera forma cuadrática

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

686. Hallar el ángulo comprendido entre las líneas $v = u + 1$ y $v = 3 - u$ sobre la superficie $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = u^2$.

687. Sobre un helicoide recto $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = av$ están definidas las líneas

$$v = \ln\left(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C.$$

Calcular las longitudes de los arcos de estas líneas entre dos puntos $M_1(u_1, v_1)$ y $M_2(u_2, v_2)$.

688. Sobre la seudoesfera

$$x = a\operatorname{sen} u\cos v, \quad y = a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v,$$
$$z = a\left(\ln\operatorname{tg}(u/2) + \cos u\right)$$

se dan dos familias de líneas

$$v = \pm a\ln\operatorname{tg}(u/2) + C.$$

Calcular la longitud del arco de la línea de cada familia entre dos puntos $M_1(u_1, v_1)$ y $M_2(u_2, v_2)$.

Demostrar que las longitudes de los arcos de todas las líneas de una familia entre dos líneas fijas de otra familia son iguales.

689. Sobre una esfera está representado un triángulo rectangular cuyos lados son arcos de grandes circunferencias de la esfera. Hallar: a) la relación entre los lados del triángulo; b) su área.

690. Hallar el área de un cuadrilátero sobre el helicoide recto $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = av$, acotado por las líneas $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

691. Hallar el área del triángulo curvilíneo $u = \pm av$, $v = 1$ que está en una superficie con la primera forma cuadrática

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

692. Hallar el área de una región esférica convexa limitada por el bucle de una curva de Viviani.

693. Llámase *lúnula esférica* a la figura constituida por dos grandes semicircunferencias que tienen los extremos comunes. Hallar el área S de una lúnula esférica con el ángulo φ_0 en el vértice.

694. Demostrar que toda superficie cilíndrica se puede superponer a un plano.

695. Demostrar que toda superficie cónica se puede superponer a un plano.

696. Demostrar que se puede superponer a un plano la superficie que es una parte de la figura formada por las tangentes a cierta línea.

697. Demostrar que un helicoide recto se puede superponer a un catenoide.

698. Llámase *superficie de Liouville* a la que tiene una primera forma cuadrática que se puede reducir a la forma

$$ds^2 = (f(u) + g(v))\,(du^2 + dv^2).$$

Demostrar que una superficie aplicable a la superficie de rotación es superficie de Liouville.

699. Demostrar que cualquier superficie de rotación se puede aplicar localmente de un modo conforme sobre un plano.

700. La aplicación de una superficie sobre otra se llama *equiareal* si las regiones de aplicación correspondientes tienen las áreas iguales. Demostrar que si la aplicación de una superficie sobre la otra es conforme y equiareal, entonces es isométrica.

§ 14. Aplicación esférica, segunda forma cuadrática

Sea S una superficie orientada cuya orientación se determina por el campo de m vectores unitarios sobre la superficie, ortogonales a ella. La aplicación de la superficie S en la esfera S^2 tal, que al punto $M \in S$ le pone en corres-

pondencia el punto M' de una esfera cuyo radio vector es igual a $m(M)$, se llama *aplicación esférica* (o *gaussiana*) *de la superficie* S. Con ello, el espacio tangente $T_M S$ se puede identificar con el espacio tangente $T_{M'} S^2$, identificando el vector tangente (M, h) con (M', h). La aplicación esférica es suave y su diferencial en el punto M, considerada como transformación lineal del espacio $T_M S$, se denomina *operador principal de la superficie* (en el punto M) y se designa con $\mathcal{A}$. Con ayuda del operador principal en cada espacio vectorial tangente a la superficie S se determina la forma simétrica bilineal φ_2, llamada *segunda forma fundamental*, por la regla $\varphi_2(h, p) = -\mathcal{A}(h)\cdot p = -h\cdot \mathcal{A}(p)$. La forma cuadrática φ_2 correspondiente se denomina *segunda forma cuadrática de la superficie* y se denota también por φ_2. Si (U, r) es la parametrización de la superficie y

$$m = \frac{\partial_u r \times \partial_v r}{|\partial_u r \times \partial_v r|},$$

entonces

$$\mathcal{A}(\partial_u r) = \partial_u m, \quad \mathcal{A}(\partial_v r) = \partial_v m$$

y para los vectores tangentes $h = \partial_u r h_1 + \partial_v r h_2$ y $p = \partial_u r p_1 + \partial_v r p_2$

$$\mathcal{A}(h) = \partial_u m h_1 + \partial_v m h_2$$

y

$$\varphi_2(h, p) = -\partial_u m\cdot\partial_u r h_1 p_1 - \partial_u m\cdot\partial_v r h_1 p_2 - \partial_v m\cdot\partial_u r h_2 p_1 - \partial_v m\cdot\partial_v r h_2 p_2.$$

Las funciones

$$L(u, v) = -\partial_u m(u, v)\cdot\partial_u r(u, v) = m(u, v)\cdot\partial^2_{uu} r(u, v) = \frac{\partial_u r\,\partial_v r\,\partial^3_{uu} r}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M(u, v) = -\partial_u m(u, v)\cdot\partial_v r(u, v) = -\partial_v m(u, v)\cdot\partial_u r(u, v) = m(u, v)\cdot\partial^2_{uv} r(u, v) = \frac{\partial_u r\,\partial_v r\,\partial^2_{uv} r}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N(u, v) = -\partial_v m(u, v)\cdot\partial_v r(u, v) = m(u, v)\cdot\partial^2_{vv} r(u, v) = \frac{\partial_u r\,\partial_v r\,\partial^2_{vv} r}{\sqrt{EG - F^2}}$$

se denominan *coeficientes de la segunda forma cuadrática (fundamental) de la superficie.* Tiene lugar la fórmula

$$\varphi_2(h, p) = Lh_1p_1 + M(h_1p_2 + h_2p_1) + Nh_2p_2.$$

La segunda forma cuadrática se escribe frecuentemente así:

$$\varphi_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

En la base movible $(\partial_u r \partial_v r)$ de una superficie, la matriz del operador principal (de la transformación lineal) $\mathcal{A}$ tiene la forma

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} FM-GL & FN-GM \\ FL-EM & FM-EN \end{bmatrix}.$$

En cada punto de la superficie se determinan los valores propios (reales) λ_1, λ_2 del operador principal $\mathcal{A}$ y los vectores propios unitarios recíprocamente ortogonales e_1, e_2 tales, que $\mathcal{A}(e_1) = \lambda_1 e_1$, $\mathcal{A}(e_2) = \lambda_2 e_2$. Las direcciones determinadas en cada plano tangente de la superficie por los vectores e_1 y e_2 se llaman *principales.* El punto de la superficie, en que el operador principal es nulo, o sea, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ se denomina *punto de aplanamiento.*

El punto en que el operador principal es una semejanza, o sea, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ se llama *punto de redondeo* (o punto *umbílico*).

Denomínase *curvatura normal* k_n de una línea sobre la superficie en un punto M, al valor de la proyección del vector de curvatura kn de esta línea en el punto M sobre la normal a la superficie, orientada por el vector $m(M)$. Si dos líneas en la superficie tienen en el punto M una recta tangente común, entonces sus curvaturas normales en este punto coinciden. Por eso la curvatura normal en el punto M se puede considerar como función de la dirección en el plano tangente en el punto M y llamarla *curvatura normal de la superficie en la dirección dada.* La curvatura normal de una línea que tiene en el punto M el vector tangente h se calcula por la fórmula

$$k_n(h) = \frac{\varphi_2(h)}{\varphi_1(h)}.$$

Si por la normal a la superficie en el punto M se pasa un plano, entonces en el entorno del punto M la intersección de este plano con la superficie es línea y se llama *sección normal*. La curvatura de la sección normal coincide con el módulo de su curvatura normal. La curvatura k de una línea en superficie está enlazada con la curvatura k_0 de la sección normal, que tiene con la línea en cuestión la tangente común, según la fórmula

$$k_0 = k \mid \cos \theta \mid,$$

donde θ es el ángulo comprendido entre el vector m y el vector n de la normal principal de la línea. Las curvaturas normales de una superficie en las direcciones principales se llaman *curvaturas normales principales* y se designan mediante k_1 y k_2.

Existen las fórmulas

$$k_1 = -\lambda_1, \quad k_2 = -\lambda_2$$

y k_1, k_2 son las raíces de la ecuación

$$(EG - F^2) k^2 - (EN + GL - 2FM) k + LN - M^2 = 0.$$

Si el vector tangente h engendra el ángulo φ con el vector e_1 de la dirección principal, entonces

$$k_n (h) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

o sea, la *fórmula de Euler*.

La *curvatura total* (o *gaussiana*) de una superficie en un punto se determina por la fórmula

$$K = \det \mathcal{A} = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

y la *curvatura media*, por la fórmula

$$H = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathcal{A} = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}.$$

Si $K > 0$, entonces el punto de la superficie se llama *elíptico*; si $K < 0$, *hiperbólico*; si $K = 0$, *parabólico*.

Si a partir de cierto punto M de una superficie se traza en la tangente a cada sección normal un segmento igual a la raíz cuadrada del radio de curvatura de esta sección, entonces se obtiene una línea que se denomina *de Dupin*.

701—714. Hallar los conjuntos de puntos sobre una esfera en los que se representan las superficies indicadas a continuación con su aplicación esférica:

(701) Una esfera.

(702) Un elipsoide.

(703) Un paraboloide elíptico.

(704) Un hiperboloide de rotación de una hoja.

(705) Un hiperboloide de rotación de dos hojas.

(706) Un cilindro elíptico.

(707) Un cilindro parabólico.

(708) Un cilindro hiperbólico.

(709) Un cono circular.

(710) Un catenoide.

(711) Una seudoesfera.

(712) Un toro.

(713) El cilindro $y = x^3$.

(714) Un helicoide recto.

715. Supongamos que la superficie S es una parte de la figura constituida por las tangentes de la curva espacial $r = r(t)$. Demostrar que la imagen de la superficie S en aplicación esférica es la curva sobre la esfera.

716—726. Hallar la segunda forma cuadrática de las superficies de rotación siguientes:

(716) $x = f(u) \cos v$, $y = f(u) \operatorname{sen} v$, $z = g(u)$, o sea, una superficie de rotación con el eje de rotación Oz.

(717) $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \operatorname{sen} v$, $z = R \operatorname{sen} u$, o sea, una esfera.

(718) $x = a \cos u \cos v$, $y = a \cos u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{sen} u$, o sea, un elipsoide de rotación.

(719) $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = a \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{sh} u$, o sea, un hiperboloide de rotación de una hoja.

(720) $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{ch} u$, o sea, un hiperboloide de rotación de dos hojas.

(721) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, o sea, un paraboloide de rotación.

(722) $x = R \cos v$, $y = R \operatorname{sen} v$, $z = u$, o sea, un cilindro de sección circular.

(723) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = ku$ $(u \neq 0)$, o sea, un cono circular sin vértice.

(724) $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \operatorname{sen} v$, $z = b \operatorname{sen} u$, o sea, un toro.

(725) $x = a \operatorname{ch}(u/a) \cos v$, $y = a \operatorname{ch}(u/a) \operatorname{sen} v$, $z = u$, o sea, un catenoide.

(726) $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$, o sea, una seudoesfera.

727. Hallar la segunda forma cuadrática del helicoide directo $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$.

728. Mostrar que cualesquiera que se escojan las coordenadas curvilíneas sobre un plano la segunda forma cuadrática es igual idénticamente al cero.

729. Si la segunda forma cuadrática de la superficie

$$z = f(x, y)$$

es idénticamente igual a cero, entonces la superficie es un plano o una parte de este último. Demuéstrese esto.

730. Mostrar que las ecuaciones del catenoide (problema 530) se puede representar en la forma

$$x = \sqrt{u^2 + a^2} \cos v,$$
$$y = \sqrt{u^2 + a^2} \operatorname{sen} v,$$
$$z = a \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2}).$$

Hallar la segunda forma cuadrática del catenoide con la parametrización indicada y calcular la curvatura normal de las líneas de coordenadas.

731. La superficie S es una parte de la figura constituida por las tangentes a una línea espacial. Hallar las curvaturas principales de la superficie S.

732. Calcular las curvaturas principales en los vértices del hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

733. Hallar las direcciones principales y las curvaturas principales del helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$.

734. Demostrar que las direcciones principales de un helicoide recto bisecan los ángulos comprendidos entre las direcciones de la generatriz y de la hélice.

735. Calcular las curvaturas principales de la superficie $z = xy$ en el punto $M(1, 1, 1)$.

736. Calcular las curvaturas principales de la superficie

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

en el punto M (0, 0, 0).

737. Mostrar que en todo punto de la superficie $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = \lambda u$, una de las secciones normales principales es recta.

738. Hallar las curvaturas de las secciones normales de la superficie $y = x^2/2$, a) en un punto arbitrario; b) en los puntos de las líneas que se obtienen en las secciones de la superficie por los planos $z = k$ en las direcciones que van por las tangentes a estas líneas; c) en el punto M (2, 2, 4) en la dirección de la tangente a la línea $y = x^2/2$, $z = x^2$.

739. En la superficie $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ se da el punto P ($u = 1$, $v = 1$).

a) Calcular las curvaturas principales de la superficie en el punto P.

b) Hallar las ecuaciones de las tangentes PT_1, PT_2 a las secciones normales tangentes en el punto indicado.

c) Calcular la curvatura de la sección normal en el punto P la cual pasa por la tangente a la línea $v = u^2$.

740. Dada la superficie

$$z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2.$$

a) Hallar en el origen de las coordenadas la ecuación de la indicatriz de Dupin.

b) Calcular en el origen de las coordenadas el radio de curvatura de la sección normal, la tangente al cual forma un ángulo de 45° con el eje Ox.

741. En el plano tangente en un punto M de una superficie están trazadas n líneas que forman entre sí ángulos iguales π/n. Mostrar que

$$\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}\right)=H,$$

donde $1/r_i$ son las curvaturas normales de las líneas en la superficie, que tocan las rectas en cuestión.

742. Por el vértice M de un elipsoide de rotación se trazan todas las líneas posibles. Hallar la figura constituida por los centros de curvatura de estas líneas en el punto M.

743. Mostrar que las superficies desarrollables se caracterizan por el hecho de que su curvatura total en todos los puntos es igual al cero.

744. Hallar las superficies para las cuales la segunda forma cuadrática sea un cuadrado completo.

745. Mostrar que uno de los radios principales de curvatura de una superficie de rotación es igual al segmento de la normal, comprendido entre la superficie y el eje de rotación.

746. Hallar la curvatura total de las superficies indicadas en los problemas 639—649 como producto de las curvaturas principales (sin calcular las formas cuadráticas).

747. Si una parábola gira en torno a la directriz, se obtiene una superficie en la cual $|R_1| = 2|R_2|$, donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura. Demuéstrese esto.

748. Hallar la expresión de la curvatura total de una superficie referida a las coordenadas isotérmicas.

749. Hallar la expresión de la curvatura total de una superficie referida a las *coordenadas semigeodésicas*, o sea, a tales en que la primera forma cuadrática tiene el aspecto

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2.$$

750. Hallar la curvatura total de una superficie cuya forma cuadrática sea

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2.$$

751. Hallar la curvatura total del paraboloide

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

752. Mostrar que si la primera forma cuadrática tiene el aspecto

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\,du\,dv + dv^2,$$

entonces su curvatura total se calcula por la fórmula

$$K = \frac{d^2_{uv}\omega}{\operatorname{sen}\omega}.$$

753. Hallar la curvatura total de la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

754. Demostrar que la curvatura total de una superficie con la primera forma cuadrática

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}$$

es constante.

755. La superficie S es una parte de la figura constituida por las normales principales (por las binormales) de una línea espacial. Hallar la curvatura total de la superficie S.

756. Hallar la curvatura total y la media del helicoide directo $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$. ¿En qué líneas la curvatura total es constante?

757. Hallar la curvatura total y la media de la superficie $z = f(x, y)$.

758. Hallar la curvatura total y la media de la superficie de rotación $z = f(\rho)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

759. Hallar la curvatura media de un cilindro circular de radio a.

760. Supongamos que una superficie fue obtenida haciendo girar en torno al eje l una línea L que no tenga puntos con curvatura nula. Si la línea L está vuelta con concavidad hacia el eje l, entonces la superficie estará compuesta por puntos elípticos; pero si está vuelta hacia el eje l con convexidad, esta superficie estará constituida por puntos hiperbólicos. Demuéstrese esto.

761. Hallar los puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos sobre un toro.

762—766. Investigar el carácter de los puntos en las superficies obtenidas por la rotación de las líneas siguientes:

(762) La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(x \neq k\pi)$ gira alrededor del eje Ox.

(763) La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(x \neq k\pi)$ gira alrededor del eje Oy.

(764) La línea $y = \ln x$ $(x \neq 1)$ gira alrededor del eje Ox.

(765) La línea $y = \ln x$ gira alrededor del eje Oy.

(766) La rama de la hipérbola $xy = 1$ $(x > 0,\ x \neq \sqrt{-B/A})$ gira alrededor de la recta $Ax + By = 0$.

767—775. Investigar el carácter de los puntos en las superficies de segundo orden siguientes:

(767) Un elipsoide.

(768) Un hiperboloide de una hoja.

(769) Un hiperboloide de dos hojas.

(770) Un paraboloide elíptico.

(771) Un paraboloide hiperbólico.

(772) Un cilindro elíptico.

(773) Un cilindro parabólico.

(774) Un cilindro hiperbólico.

(775) Un cono sin vértice.

776. Averiguar el carácter de los puntos de la superficie $z = f(u)$, donde $u = \sqrt{x^2 - y^2}$.

777. Mostrar que todos los puntos de la superficie $x + y = z^3$ son parabólicos.

778. Demostrar que la única superficie conexa con curvatura total no nula constituida completamente por los puntos de redondeo es una esfera o parte de la esfera.

779. Para que un punto de una superficie sea un punto de redondeo es necesario y suficiente que en este punto se cumplan las condiciones

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

Demuéstrese esto.

780. Señalar el método geométrico de construcción de los puntos de redondeo para una superficie de rotación.

781. La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(x \neq k\pi)$ gira en torno al eje Ox. Hallar en la superficie de rotación los puntos de redondeo.

782—786. Hallar los puntos de redondeo de las superficies siguientes:

(782) Del elipsoide de rotación.

(783) Del paraboloide de rotación.

(784) Del paraboloide elíptico.

(785) Del elipsoide de tres ejes.

(786) Del hiperboloide de dos hojas.

787. Mostrar que los puntos de redondeo de la superficie

$$x = \frac{u^2}{2} + v, \qquad y = u + \frac{v^2}{2}, \qquad z = uv$$

se encuentran en las líneas

$$u = v, \quad u + v + 1 = 0.$$

788. Demostrar que el punto de redondeo se caracteriza por la igualdad

$$H^2 = K.$$

789. Citar un ejemplo de superficie con un único punto de aplanamiento.

790. Citar un ejemplo de superficie en la cual los puntos de aplanamiento forman una línea.

791. Demostrar que la única superficie constituida enteramente por puntos de aplanamiento es un plano o parte del plano.

§ 15. Redes conjugadas y líneas asintóticas

Una familia uniparamétrica de líneas en una superficie definida por la ecuación

$$f(u, v, C) = 0,$$

se llama *regular* si por cada punto de la región en examen pasa una y solamente una línea de la familia. Denomínase *red de líneas* en superficie al conjunto de dos familias regulares cuyas líneas, intersecándose, no se tocan.

Dos direcciones en el plano tangente de la superficie representadas por los vectores h y p se llaman *conjugadas* si $\varphi_2(h, p) = 0$, o sea, si

$$Lh_1p_1 + M(h_1p_2 + h_2p_1) + Nh_2p_2 = 0,$$

donde $h = (h_1, h_2)$, $p = (p_1, p_2)$.

Una *red de líneas* en superficie se dice *conjugada* si en cada punto los vectores tangenciales a las líneas de diferentes familias de esta red están conjugados.

La dirección determinada por el vector h, se denomina *asintótica* si $\varphi_2(h, h) = 0$. La dirección asintótica viene caracterizada por el hecho de que la curvatura normal de la superficie en esta dirección es igual a cero. Una línea en superficie se llama *asintótica* si en cada punto su tangente tiene la dirección asintótica. Las representaciones interiores de líneas asintóticas se hallan como soluciones de la ecuación diferencial

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0,$$

En una superficie compuesta por puntos elípticos no hay líneas asintóticas. En una superficie constituida por puntos hiperbólicos, por cada punto pasan dos líneas asintóticas. En una superficie formada por puntos parabólicos que no sean puntos de aplanamiento, por cada punto pasa una línea asintótica.

792. Hallar las ecuaciones diferenciales de las familias de líneas en superficie que forman una red conjugada con la familia de líneas de coordenadas $u =$ const y $v =$ const.

793. Hallar la condición de conjugación de dos familias de líneas en superficie, definidas por la ecuación diferencial

$$P(u, v)\,du^2 + Q(u, v)\,du\,dv + R((u, v)\,dv^2 = 0.$$

794. Las líneas $v^2\,du^2 - u^2\,dv^2 = 0$ que se encuentran sobre el helicoide $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$, forman una red conjugada. Demuéstrese esto.

795. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de líneas en superficie que forman una red conjugada con la familia de líneas $\varphi(u, v) = C$.

796. Mostrar que las líneas de coordenadas de la superficie de traslación $r = r_1(u) + r_2(v)$ forman una red conjugada.

797. El paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$$

está cortado por los planos $x + y = C$, donde C es una constante arbitraria. Hallar la familia de líneas que forman con estas secciones una red conjugada.

798. En el punto $M(1, 1, 1)$ de la superficie $xyz = 1$ hállese la dirección conjugada con la dirección $a(1, -2, 1)$.

799. La familia monoparamétrica de líneas en superficie está definida por la ecuación diferencial

$$A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv = 0.$$

Hallar la ecuación diferencial de la familia de las líneas conjugadas con las dadas.

800. En una superficie desarrollable una familia de generatrices rectilíneas está conjugada con toda familia monoparamétrica de líneas. Demuéstrese esto.

801. Hallar las líneas conjugadas a la familia de líneas $u + v = C$ sobre el helicoide oblicuo $x = u \cos v$, $y = v \operatorname{sen} v$, $z = u + v$.

802. Demostrar que una línea en superficie es asintótica si, y sólo si, satisface una de las condiciones siguientes:

a) en cada punto suyo la tangente tiene la dirección asintótica;

b) en cada punto la curvatura normal de la línea es igual a cero;

c) en los puntos de la línea donde su curvatura se distingue de cero el plano osculador de la línea coincide con el plano tangente a la superficie.

803. Para que las líneas de coordenadas en superficie sean asintóticas es necesario y suficiente que $N = L = 0$. Demuéstrese esto.

804. Hallar las líneas asintóticas de una seudoesfera. Demostrar que forman una red de Chébishev.

805. Sea l una línea asintótica a la superficie Φ. Demostrar que las características de la familia monoparamétrica de planos tangentes a la superficie Φ a lo largo de la línea l coinciden con las tangentes a la línea l.

806. Encontrar la ecuación diferencial de las líneas asintóticas de una superficie de rotación.

807. Hallar las líneas asintóticas del catenoide $x = \operatorname{ch} u \cos v$, $y = \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v$, $z = u$.

808. Investigar las líneas asintóticas de un toro.

809. Hallar las líneas asintóticas de un helicoide recto.

810. Hallar las líneas asintóticas de un hiperboloide de una hoja.

811. Una recta se desplaza en paralelo al plano xOy, cortando el eje Oz y la línea $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$. Hallar las líneas asintóticas a la superficie descrita por esta recta.

812. Mostrar que la línea

$$x = \frac{2}{1+t}, \quad y = \frac{2}{1-t}, \quad z = t$$

es una línea asintótica de la superficie

$$z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$$

813. En la superficie engendrada por las normales principales de una línea espacial esta línea es asintótica. Demuéstrese esto.

814. Una superficie se llama *mínima* si su curvatura media es idéntica a cero. Mostrar que en la superficie mínima la red de líneas asintóticas es ortogonal, o sea, en todos los puntos las líneas de una familia son ortogonales a las líneas de la otra.

815. Si en cierto punto de una superficie la curvatura media es igual a cero, entonces las direcciones asintóticas son perpendiculares recíprocamente. Demuéstrese esto.

816. Mostrar que en un plano toda línea es asintótica e, inversamente, la superficie en que toda línea es asintótica es un plano o parte del plano.

817. Mostrar que en una superficie paralela a la dada las líneas correspondientes a las líneas asintóticas de la superficie en cuestión serán asintóticas si, y sólo si, la superficie dada es desarrollable.

818. Demostrar que la línea l de una superficie y su aplicación esférica l' tienen en los puntos correspondientes las tangentes perpendiculares si, y sólo si, l es una línea asintótica.

§ 16. Líneas de curvatura

Una línea en una superficie se llama *línea de curvatura* si en cada punto de la línea su tangente tiene la dirección principal. Las representaciones interiores de las líneas de curvatura se hallan de la ecuación diferencial

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Por cada punto de la superficie que no sea punto de aplanamiento o de redondeo, pasan dos líneas de curvatura recíprocamente ortogonales.

819. Demostrar que una línea en superficie es línea de curvatura si, y sólo si, se cumple una de las condiciones siguientes:

a) la línea en cada punto va por la dirección principal;

b) la curvatura normal en cada punto suyo es igual a una de las curvaturas principales;

c) las normales a la superficie a lo largo de la línea forman una superficie desarrollable.

820—826. Hallar las líneas de curvatura de las superficies siguientes:

(820) De una superficie cilíndrica arbitraria.

(821) De una superficie cónica arbitraria.

(822) De una superficie de rotación arbitraria.

(823) De la superficie $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = v$.

(824) De una superficie desarrollable arbitraria.

(825) De un helicoide recto.

(826) De un paraboloide elíptico.

827. En un plano o en una esfera toda línea es línea de curvatura. Demuéstrese esto.

828. Demostrar que las líneas de coordenadas de una superficie son líneas de curvatura si, y sólo si, $F = M = 0$.

829. Mostrar que las líneas de coordenadas de la superficie $x = 3u - u^3 + 3uv^2$, $y = v^3 - 3u^2v - 3v$; $z = 3(u^2 - v^2)$ son líneas de curvatura.

830. Demostrar que la generatriz rectilínea de una superficie reglada oblicua no puede ser línea de curvatura.

831. Hallar la envolvente de la familia de superficies normales, trazadas en los puntos de la línea de curvatura.

832. Demostrar que en la región de los puntos hiperbólicos de una superficie las líneas de curvatura en cada punto bisecan los ángulos comprendidos entre las líneas asintóticas.

833. Mostrar que a las líneas de curvatura de una superficie S en una superficie paralela a ésta corresponden también líneas de curvatura.

834. Averiguar en qué condiciones a la red ortogonal en la superficie dada corresponderá la red ortogonal en una superficie paralela a la indicada.

835. ¿En qué condiciones el sistema de secciones circulares de un elipsoide es sistema de líneas de curvatura?

836. En cualquier superficie existe una única red ortogonal conjugada que coincide con las líneas de curvatura de la superficie. Demuéstrese esto.

837. Para que la línea de curvatura de cierta superficie, por la cual ella corta otra superficie, sea línea

de curvatura también de esta última, es necesario y suficiente que estas superficies se intersequen bajo un ángulo constante. Demuéstrese esto.

838. Demostrar que la aplicación esférica de la línea de curvatura plana de una superficie es una circunferencia.

839. Demostrar que con la aplicación esférica de una superficie, la línea l en superficie y su imagen l' tendrán las tangentes paralelas en los puntos correspondientes si, y solo si, l es línea de curvatura.

§ 17. Líneas geodésicas

Llámase *línea geodésica* en superficie a la línea, en cada punto de la cual se cumple una de las condiciones:

a) la curvatura de la línea es igual a cero;

b) la normal a la superficie es la normal principal de la línea.

Si la red de coordenadas es ortogonal, entonces las ecuaciones diferenciales de las representaciones interiores de las líneas geodésicas dadas tienen la forma

$$\left.\begin{aligned} 2E\frac{d^2u}{ds^2}+\partial_u E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\partial_v E\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}-\partial_u G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,\\ 2G\frac{d^2v}{ds^2}-\partial_v E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\partial_u G\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\partial_v G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0, \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

considerando que $dv\neq 0$, este sistema puede ser sustituido por la ecuación

$$\frac{d^2u}{dv^2}+\frac{\partial_v E}{2G}\left(\frac{du}{dv}\right)^3+\left(\frac{\partial_u E}{2E}-\frac{\partial_u G}{G}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2+\\ +\left(\frac{\partial_v E}{E}-\frac{\partial_v G}{2G}\right)\frac{du}{dv}-\frac{\partial_u G}{2E}=0.$$

Serán o no en este caso las líneas $v=\text{const}$ geodésicas, conviene comprobarlo partiendo del sistema (1).

Por cada punto de una superficie pasa en la dirección dada una sola línea geodésica.

Llámase *curvatura geodésica* de la línea sobre una superficie en el punto dado a la longitud de proyección del vector de curvatura de la línea $k\boldsymbol{n}$ sobre el plano tangente a la superficie en este punto.

Denomínase *torsión geodésica*, correspondiente a la dirección dada, a la torsión de la línea geodésica que pasa en esta dirección. Si en la superficie las coordenadas curvilíneas están escogidas de modo tal que una familia de líneas de coordenadas se compone de líneas geodésicas y la segunda, de sus trayectorias ortogonales, además una de las coordenadas curvilíneas coincide con la longitud de arcos de las líneas de coordenadas de la primera familia, entonces el sistema de coordenadas se llama *semigeodésica*. En tal sistema de coordenadas la primera forma cuadrática es

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2.$$

840. Demostrar que la línea geodésica en una superficie se caracteriza completamente por una de las propiedades siguientes:

a) En cada punto de la línea donde su curvatura es distinta de cero la normal a la superficie es la normal principal de la línea.

b) En cada punto de la línea donde su curvatura es distinta de cero la normal a la superficie está en el plano osculador de la línea.

c) En cada punto de la línea su curvatura geodésica es igual a cero.

d) En cada punto de la línea su curvatura es igual al valor absoluto de la curvatura normal.

e) En cada punto de la línea donde su curvatura es distinta de cero su plano rectificante coincide con el plano tangente a la superficie.

841. Demostrar que toda línea recta en una superficie es una línea geodésica.

842. Dos superficies son tangentes entre sí por la línea l. Demostrar que si l es línea geodésica en una superficie, entonces ella debe ser geodésica también en la otra superficie.

843. Mostrar que la ecuación diferencial de las líneas geodésicas de la superficie $r = r(u, v)$ se puede representar en la forma $N\, dr\, d^2r = 0$, donde N es el vector de la normal de la superficie.

844. Demostrar que las líneas geodésicas de un plano son sólo rectas.

845. Demostrar que las líneas geodésicas de una superficie cilíndrica son sólo generatrices rectilíneas y hélices generalizadas.

846. Demostrar que los meridianos de una superficie de rotación son líneas geodésicas.

847. Demostrar que la paralela de una superficie de rotación será geodésica si, y sólo si, la tangente al meridiano en sus puntos es paralela al eje de rotación.

848. Hallar las líneas geodésicas sobre una esfera.

849. Demostrar que una línea geodésica es asintótica si, y sólo si, es recta.

850. Demostrar que una línea geodésica es línea de curvatura si, y sólo si, es plana.

851. La envolvente de los planos rectificantes de una línea geodésica en una superficie desarrollable es la superficie dada. Demuéstrese esto.

852. El vector de Darboux de una línea geodésica en una superficie desarrollable está orientado por la generatriz en el punto dado. Demuéstrese esto.

853. En la superficie que envuelve los planos rectificantes de una línea espacial, esta línea es geodésica. Demuéstrese esto.

854. Demostrar que la curvatura geodésica de una línea en una superficie puede ser calculada por la fórmula

$$k_g = m\dot{r}\ddot{r},$$

donde m es el vector unitario de la normal a la superficie.

855. Demostrar que la curvatura geodésica es igual a la curvatura de la proyección de la línea sobre el plano que toca la superficie en el punto dado de la línea.

856—858. Hallar la curvatura geodésica:

(856) De una circunferencia de radio r que descansa sobre una esfera de radio R.

(857) De las hélices $u =$ const que están sobre el helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$.

(858) De las líneas $u =$ const y $v =$ const en la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = f(v)$.

859. Mostrar que la curvatura geodésica en los puntos de una línea asintótica es igual a su curvatura.

860. Demostrar que la torsión geodésica de la línea sobre una superficie puede ser calculada por la fórmula:

$$\varkappa_g = \dot{r}\dot{m}m,$$

donde m es el vector unitario de la normal a la superficie.

861. Para que una línea en una superficie sea línea de curvatura es necesario y suficiente que en cada punto suyo la torsión geodésica sea igual a cero. Demuéstrese esto.

862. Mostrar que la torsión geodésica en los puntos de una línea asintótica es igual a la torsión de la línea asintótica.

863—864. Hallar las líneas geodésicas:

(863) De un helicoide recto.

(864) De una seudoesfera.

865. Mostrar que las líneas geodésicas en una superficie de Liouville se definen por las ecuaciones

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)+a}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)-a}} + b,$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

866. Demostrar que en una superficie de rotación a lo largo de toda línea geodésica se cumple la relación

$$\rho \cos \mu = c,$$

donde ρ es la distancia comprendida entre el punto geodésico y el eje de rotación, μ es el ángulo comprendido entre la geodésica y la paralela, c es el número constante para la geodésica dada (*teorema de Clairaut*).

¿Es cierto el teorema recíproco? O sea, ¿se deduce del cumplimiento de la relación indicada a lo largo de cierta línea en la superficie de rotación la afirmación de que esta línea es geodésica?

867—869. Valiéndose del teorema de Clairaut, investigar el comportamiento de las líneas geodésicas de las superficies siguientes:

(867) De un elipsoide de rotación.

(868) De un hiperboloide de rotación de una hoja.

(869) De un toro.

870. Si por un punto M_0 de una superficie se trazan en todas las direcciones posibles las líneas geodésicas y se

marcan sobre ellas, a partir del punto M_0, arcos de longitud igual, entonces los extremos de estos arcos forman la rayectoria ortogonal de las geodésicas. Demuéstrese esto.

§ 18. Método de un sistema de referencia móvil en la teoría de superficies[1]

Llámase *forma diferencial lineal* (o *1-forma*) en una superficie S a la aplicación ω que a cada punto $M \in S$ le pone en correspondencia la forma líneal ω_M sobre el espacio vectorial T_MS; la 1-forma ω pone en correspondencia a cada campo vectorial ξ sobre la superficie la función $\omega(\xi)$ en superficie, determinada por la fórmula

$$\omega(\xi)(M) = \omega_M(\xi_M).$$

La 1-forma ω se dice *suave* si para cualquier campo vectorial suave ξ la función $\omega(\xi)$ es suave.

Denomínase *2-forma* en una superficie S a la aplicación Ω que a cada punto $M \in S$ le pone en correspondencia la 2-forma Ω_M sobre el espacio vectorial T_MS; la 2-forma Ω pone en correspondencia a cada par de campos vectoriales ξ, η sobre la superficie la función $\Omega(\xi, \eta)$ en superficie, determinada por la fórmula

$$\Omega(\xi, \eta)(M) = \Omega_M(\xi_M, \eta_M).$$

La 2-forma se dice *suave* si para cualesquiera campos vectoriales ξ, η la función $\Omega(\xi, \eta)$ es suave. A continuación examinaremos solamente 1-formas y 2-formas suaves.

Llámase *producto exterior* de las 1-formas ω y θ en una superficie S a la 2-forma $\omega \wedge \theta$ determinada por la fórmula $(\omega \wedge \theta)_M = \omega_M \wedge \theta_M$, donde el producto exterior $\omega_M \wedge \theta_M$ se considera en el espacio vectorial T_MS. Sean (U, r) la parametrización de una superficie S con las coordenadas curvilíneas (u, v) y $W = r(U)$. Entonces las diferenciales du, dv de las coordenadas curvilíneas se pueden considerar como 1-formas en W por la regla

$$du_M(h) = h_1, \quad dv_M(h) = h_2,$$

[1] En § 18 se da la numeración continua de las fórmulas que se usa también en las respuestas.

donde h es el vector tangencial de la superficie en el punto M y (h_1, h_2) son sus coordenadas en la base móvil $(\partial_u r, \partial_v r)$. Toda 1-forma ω en W se representa unívocamente del modo

$$\omega = a_1\, du + a_2\, dv,$$

donde $a_1 = \omega(\partial_u r)$, $a_2 = \omega(\partial_v r)$ son funciones suaves en W. La diferencial df de la función f representada sobre W es una 1-forma en W. Esta función f se puede considerar también como función en U por la regla

$$f(u, v) = f(r(u, v)).$$

Entonces df se representa así:

$$df = \partial_u f\, du + \partial_v f\, dv.$$

Llámase *diferencial exterior* de la 1-forma ω dada en W a la 2-forma $d\omega$ determinada por la fórmula

$$d\omega = da_1 \wedge du + da_2 \wedge dv = (\partial_u a_2 - \partial_v a_1)\, du \wedge dv.$$

Denomínase *sistema de referencia móvil* sobre una superficie orientada $W = r(U)$ a la aplicación que a cada punto M de W le pone en correspondencia el sistema de referencia $(M, e_1(M), e_2(M), e_3(M))$ donde los vectores $e_1(M)$, $e_2(M)$ pertenecen a $T_M W$ y $(e_1(M), e_2(M), e_3(M))$ es la base ortonormalizada en $\mathbb{R}^3$ concordada con la orientación de la superficie W. Las magnitudes M, e_1, e_2, e_3 se pueden considerar como funciones vectoriales en W con los valores en $\mathbb{R}^3$ según la regla: la función vectorial M pone en correspondencia al punto N de la superficie su radio vector y a la función vectorial e_j, el vector $e_j(N)$ $(j = 1, 2, 3)$. Las funciones vectoriales M y e_3 son suaves, supondremos que también e_1, e_2 son suaves. Escribamos las diferenciales de estas funciones vectoriales del modo

$$\left.\begin{aligned} dM_N(h) &= \omega_N^1(h)\, e_1(N) + \omega_N^2(h)\, e_2(N) + \omega_N^3(h)\, e_3(N),\\ de_{1N}(h) &= \omega_{1N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{1N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{1N}^3(h)\, e_3(N),\\ de_{2N}(h) &= \omega_{2N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{2N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{2N}^3(h)\, e_3(N),\\ de_{3N}(h) &= \omega_{3N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{3N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{3N}^3(h)\, e_3(N), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde $h \in T_N W$. Entonces ω^i, ω_i^j $(i, j = 1, 2, 3)$ son las 1-formas sobre la superficie W. Las ecuaciones (1) se escri-

ben

$$dM = \sum_{i=1}^{3} \omega^i e_i, \quad de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j e_j. \qquad (2)$$

Las ecuaciones (2) se llaman *ecuaciones de movimiento* de un sistema de referencia móvil. Un sistema de referencia móvil (M, e_1, e_2, e_3) se denomina *sistema de referencia de Cartan* de la superficie W si en cada punto N de W los vectores $e_1(N)$ y $e_2(N)$ tienen las direcciones principales.

Sea ξ un campo vectorial suave en la superficie W y

$$\xi_N = a_1(N)\, e_1(N) + a_2(N)\, e_2(N);$$

entonces a_1, a_2 son funciones suaves en W. El campo vectorial ξ se puede también considerar como campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y escribir en la forma

$$\xi_N = \xi_1(N)\, i_1 + \xi_2(N)\, i_2 + \xi_3(N)\, i_3,$$

donde (i_1, i_2, i_3) es la base canónica en $\mathbb{R}^3$. Para la curva regular suave $\gamma(t)$ en la superficie W designemos por $\xi(t)$ el vector $\xi_{\gamma(t)}$. Entonces

$$\xi(t) = \xi_1(t)\, i_1 + \xi_2(t)\, i_2 + \xi_3(t)\, i_3,$$

donde ξ_1, ξ_2, ξ_3 son funciones suaves. El vector

$$\xi'(t) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j'(t)\, i_j$$

se llama *derivada del campo vectorial* ξ *a lo largo de la curva* γ.

Sean h el vector tangencial de la superficie W en el punto M y $\gamma(t)$ la curva regular en W que pasa por el punto M cuando $t = t_0$, tal que $\gamma'(t_0) = h$. Denomínase *derivada covariante del campo vectorial* ξ *en la dirección del vector* h a la proyección ortogonal sobre el plano tangencial de la superficie en el punto M del vector $\xi'(t_0)$ de la derivada dël campo vectorial ξ a lo largo de la curva γ. La derivada covariante del campo vectorial ξ en la dirección h se designa $D_h\xi$ y es vector tangencial a la superficie en el punto M. Si $\xi = a_1e_1 + a_2e_2$, entonces tiene lugar la fórmula

$$D_h\xi = da_1(h)\, e_1 + da_2(h)\, e_2 - a_2\omega_1^2(h)\, e_1 + a_1\omega_1^2(h)\, e_2.$$

El campo vectorial ξ se llama paralelo a lo largo de la curva γ si para todos t

$$D_{\gamma(t)}\,\xi = 0,$$

o sea, la derivada covariante del campo ξ en la dirección de todo vector tangencial de la curva γ es igual a cero.

871. De la condición de ortonormalidad de un sistema de referencia móvil se deduce que la matriz (ω_i^j) es antisimétrica. Demuéstrese esto.

872. Puesto que los vectores e_1, e_2 de un sistema de referencia móvil son base en el plano tangencial de la superfcie, entonces, en las fórmulas (1) y (2) la forma $\omega^3 = 0$. Demuéstrese esto.

873. Sea $\gamma(t)$ la línea de curvatura en la superficie W. Si el vector e_1 del sistema de referencia móvil es tangente a la línea γ, entonces $\omega_{3\gamma(t)}^2(e_1) = 0$. Por analogía, si e_2 es tangente a γ, entonces $\omega_{3\gamma(t)}^1(e_2) = 0$. Demuéstrese esto.

874. Mostrar que en todos los puntos de una superficie se cumplen las condiciones

$$\omega^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2).$$

875. Si en cada punto de una superficie W los vectores $e_1 \uparrow\uparrow \partial_u r$, $e_2 \uparrow\uparrow \partial_v r$, entonces $\omega^1 = \sqrt{E}\,du$, $\omega^2 = \sqrt{G}\,dv$, donde E, G son los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie. Demuéstrese esto.

876. Supongamos que las líneas de coordenadas de la parametrización (U, r) de la superficie W son líneas de curvatura y $e_1 \uparrow\uparrow \partial_u r$, $e_2 \uparrow\uparrow \partial_v r$. Demostrar que las 1-formas ω^i, ω_i^j se definen del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^1 = \sqrt{E}\,du, \quad \omega^2 = \sqrt{G}\,dv \\ &\omega_1^2 = -\omega_2^1 = q_1\sqrt{E}\,du + q_2\sqrt{G}\,dv, \\ &\omega_1^3 = -\omega_3^1 = p_1\sqrt{E}\,du, \\ &\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p_2\sqrt{G}\,dv. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

877. El sistema de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\partial_u b_i = \sum_{j=1}^{n} f_i^j b_j, \quad \partial_v b_i = \sum_{j=1}^{n} g_i^j b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se llama *completamente integrable* si se cumplen las condiciones

$$\partial_v \Big(\sum_{j=1}^{n} f_i^j b_j \Big) = \partial_u \Big(\sum_{j=1}^{n} g_i^j b_j \Big).$$

Este sistema se caracteriza por la existencia de la única solución para las condiciones iniciales dadas

$$b_i (u_0, v_0) = b_i^0.$$

Si las formas ω^i, ω_i^j se dan como en (3), entonces las ecuaciones de movimiento del sistema de referencia móvil son equivalentes al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_u M = \sqrt{E}\, e_1, && \partial_v M = \sqrt{G}\, e_2,\\
&\partial_u e_1 = q_1 \sqrt{E}\, e_2 + p_1 \sqrt{E}\, e_2, && \partial_v e_1 = q_2 \sqrt{G}\, e_2,\\
&\partial_u e_2 = -q_1 \sqrt{E}\, e_1, && \partial_v e_2 = -q_2 \sqrt{G}\, e_1 +\\
& && \quad + p_2 \sqrt{G}\, e_3,\\
&\partial_u e_3 = -p_1 \sqrt{E}\, e_1, && \partial_v e_3 = -p_2 \sqrt{G}\, e_2.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Mostrar que las condiciones de integrabilidad completa del sistema (4) tienen la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_v \sqrt{E} + q_1 \sqrt{EG} = 0, \quad \partial_u \sqrt{G} = q_2 \sqrt{EG},\\
&\partial_v (q_1 \sqrt{E}) - \partial_u (q_2 \sqrt{G}) = p_1 p_2 \sqrt{EG},\\
&\partial_v (p_1 \sqrt{E}) + p_2 q_1 \sqrt{EG} = 0, \quad \partial_u (p_2 \sqrt{G}) = p_1 p_2 \sqrt{EG}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Averiguar el sentido geométrico de las condiciones iniciales.

878. Mostrar que si las 1-formas ω^i, ω_i^j satisfacen las condiciones (3), entonces las condiciones de integrabilidad completa (5) son equivalentes a las condiciones

$$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2, \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2,$$
$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2, \quad d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3, \quad d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3.$$

879. Si las 1-formas ω^i, ω_i^j satisfacen las condiciones (3), entonces la primera forma cuadrática de la superficie se representa del modo

$$ds^2 = dM^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Demuéstrese esto.

880. Si las 1-formas ω^i, ω_i^j satisfacen a las condiciones (3), entonces la segunda forma cuadrática de la superficie se representa del modo

$$\varphi_2 = -dM\cdot de_3 = p_1 E\,du^2 + p_2 G\,dv^2.$$

Demuéstrese esto.

881. Mostrar que p_1 y p_2 en las ecuaciones (3) son curvaturas principales de la superficie.

882. Mostrar que una superficie reglada constituida por las tangentes a las líneas de curvatura u en los puntos de la línea de curvatura v es desarrollable y su arista de retroceso toca el eje Me_1 en los puntos con radio vector $M - \frac{1}{q_2} e_1$. Análogamente, la superficie de las tangentes a las líneas v en los puntos de la línea u es desarrollable y su arista de retroceso toca el eje Me_2 en el punto con radio vector $M + \frac{1}{q_1} e^2$.

883. Demostrar la fórmula de Euler

$$k_n = p_1 \cos^2\varphi + p_2 \operatorname{sen}^2\varphi.$$

884. Mostrar que la ecuación de la indicatriz de Dupin se puede representar en la forma $p_1x^2 + p_2y^2 = \pm 1$.

885. Mostrar que la curvatura total de una superficie depende solamente de los coeficientes de la primera forma cuadrática y puede ser expresada por la fórmula

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \partial_v \left(\frac{1}{\sqrt{G}}\, \partial_v \sqrt{E} \right) - \partial_u \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\, \partial_u \sqrt{G} \right) \right\}.$$

886. Demostrar que el cuadrado de torsión de una línea asintótica a una superficie en cada punto suyo es igual a la curvatura total de la superficie en este punto tomada con el signo contrario (*teorema de Beltrami—Ennéper*).

887. Mostrar que la curvatura geodésica de las líneas de curvatura en el punto M se expresa por las fórmulas

$$k_g|_{dv=0} = q_1, \quad k_g|_{du=0} = -q_2.$$

888. Demostrar que se tiene la fórmula

$$d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

donde K es la curvatura total de la superficie.

889. Demostrar que al trasladar en paralelo los vectores por la superficie las longitudes de los vectores y los ángulos comprendidos entre ellos se conservan.

890. Para que una línea en una superficie sea geodésica es necesario y suficiente que su vector tangente unitario sea trasladable en paralelo a lo largo de esta línea. Demuéstrese esto.

891. Si el campo vectorial unitario en la supérficie

$$r = \cos\varphi\, e_1 + \operatorname{sen}\varphi\, e_2$$

se traslada en paralelo en la superficie a lo largo de cierta línea, entonces en los puntos de esta línea,

$$-d\varphi = q_1\sqrt{E}\,du + q_2\sqrt{G}\,dv. \tag{6}$$

demuéstrese esto.

892. El ángulo de giro de un vector en la superficie al trasladarlo en paralelo por la frontera L de la región simplemente conexa D en la superficie, es igual a la *curvatura integral* de esta región, o sea,

$$\Delta\varphi = \iint\limits_D K\,d\sigma.$$

Demuéstrese esto.

893. La curvatura integral de la región simplemente conexa D de la superficie limitada por el contorno suave L y la *curvatura geodésica integral* de este contorno están vinculadas por la relación

$$\iint\limits_D K\,d\sigma + \oint\limits_L k_g\,ds = 2\pi.$$

Demuéstrese esto.

894. Sea D una región simplemente conexa en la superficie limitada por el polígono curvilíneo L. Entonces

$$\iint\limits_D K\,d\sigma + \oint\limits_L k_g\,ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son los ángulos exteriores del polígono L (teorema de Gauss—Bonnet). Demuéstrese esto.

895. Si la región D en una superficie está limitada por el triángulo geodésico ABC ($\cup AB$, $\cup BC$, $\cup CA$ son geodésicos) y sus ángulos interiores son iguales, respectivamente, a α, β, γ, entonces

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint_D K\,d\sigma.$$

Demuéstrese esto.

896. Sobre superficies simplemente conexas, en todos los puntos de las cuales la curvatura total no es positiva, no existe una línea geodésica cerrada. Demuéstrese esto.

§ 19. Problemas diversos

897. Todos los puntos de la superficie

$$2x^2+3y^2+4z^2-2xy-4x+18y-16z=0$$

se proyectan ortogonalmente sobre los planos de las coordenadas. Hallar las imágenes de las proyecciones.

898. Si una superficie toca un plano a lo largo de cierta línea, entonces cada punto de esta línea es un punto parabólico de la superficie. Demuéstrese esto.

899. Mostrar que si las normales a una superficie a lo largo de una línea l son paralelas, entonces todos los puntos de la línea l son puntos parabólicos de la superficie.

900. Si con la aplicación esférica de la superficie S cada línea asintótica de una familia se representa por una circunferencia grande, entonces S es una superficie reglada oblicua. Demuéstrese esto.

901. Demostrar que un plano y un catenoide son las únicas superficies de rotación mínimas.

902. Demostrar que entre las superficies regladas el helicoide recto es la única superficie mínima (distinta del plano).

903. Hallar todas las superficies mínimas que pueden ser definidas por la ecuación $z=f(y/x)$.

904. Sea $r=r(u, v)$ la ecuación de la superficie S y sea $r^*=r+am$ la ecuación de la superficie S^* paralela a la primera. Expresar la curvatura total y media de la

superficie S^* por la curvatura total y media de la superficie S.

905. Se da una superficie cuya curvatura H media constante es distinta de cero. En todas sus normales están trazados los segmentos de $\pm 1/2H$. Demostrar que la curvatura total de la superficie paralela construida de este modo es constante.

906. Demostrar que para la curvatura media de una superficie S existe la fórmula

$$H = \lim_{a \to 0} \frac{d\sigma - d\sigma^*}{2a\, d\sigma},$$

donde $d\sigma$ y $d\sigma^*$ son los elementos correspondientes del área de las superficies paralelas S y S^*.

907. Demostrar que el área de todo trozo de una superficie mínima no puede ser menor que el área del trozo correspondiente de la superficie paralela.

908. Demostrar que el límite de la relación entre el área de la imagen esférica de una superficie S y el área de la región respectiva de la superficie S es igual en valor y signo a la curvatura total de la superficie.

909. Demostrar que si uno de los radios principales de la curvatura de una superficie es constante, entonces la superficie es envolvente de una familia de esferas que tienen radio constante y cuyos centros están en cierta línea.

910. Dado un sistema de rectas

$$x = tz + p, \quad y = pz + \frac{t^3}{3},$$

donde t y p son parámetros variables. ¿Para qué dependencia entre p y t estas rectas engendran una superficie desarrollable? Hallar la figura formada por las aristas de retroceso de tales superficies. Hallar las líneas de intersección de estas superficies con el plano xOy.

911. Un cilindro de sección circular está cortado por un plano no paralelo a su eje. ¿Qué tipo de línea será la intersección al aplicar el cilindro al plano?

912. Se dan una esfera y una recta d. Hallar las trayectorias ortogonales de las secciones formadas sobre la esfera por los planos que pasan por la recta d.

913. Si las fuerzas externas no actúan sobre un punto material forzado a moverse por cierta superficie, entonces este punto se moverá por una geodésica. Demuéstrese esto.

914. Llámase *podaria* de una superficie con respecto a un punto dado, a la figura constituida por las bases de las perpendiculares trazadas desde este punto a los planos tangentes a la superficie. Hallar la podaria de la superficie $F(x, y, z) = 0$ con respecto al origen de las coordenadas.

915—917. Hallar las podarias de las superficies siguientes con respecto al origen de las coordenadas:

(915) $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon' \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1.$

(916) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$

(917) $xy = az.$

918. Demostrar que sólo superficies desarrollables son superponibles a un plano.

919. ¿Qué se puede decir de una superficie en la cual la primera forma cuadrática es

$$ds^2 = E(u)\,du^2 + G(v)\,dv^2?$$

920. ¿En qué superficies los coeficientes de la primera forma cuadrática pueden ser transformados en constantes?

921. Demostrar que al superponer superficies las líneas geodésicas quedan como tales.

922. Si en una superficie existen dos familias de líneas geodésicas tales que las líneas geodésicas de una familia cortan bajo un ángulo constante las líneas geodésicas de la otra familia, entonces la superficie es desarrollable. Inversamente, en toda superficie desarrollable existen familias de líneas geodésicas que poseen la propiedad indicada. Demuéstrese esto.

923. Demostrar que los planos osculadores de una línea geodésica sobre un cono están a igual distancia del vértice del cono. Inversamente, las líneas sobre el cono que poseen la propiedad señalada, son geodésicas.

924. Demostrar que dos superficies de igual curvatura total constante son superponibles una a la otra.

925. Demostrar que toda superficie de curvatura total constante positiva es superponible a la esfera.

926. Demostrar que toda superficie de curvatura total constante negativa es superponible a la seudoesfera.

927. Demostrar que al superponer un helicoide al catenoide las líneas de curvatura de una superficie pasan a las líneas asintóticas de la otra y viceversa.

CAPÍTULO 5

Propiedades afines de líneas y de superficies

Estudiamos las líneas y las superficies en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ que se distingue del espacio afín por la existencia de la métrica en el mismo. Todas las propiedades de las líneas y superficies examinadas anteriormente son invariantes con respecto a los movimientos en $\mathbb{R}^3$ y se llaman *propiedades métricas*. Sin embargo, muchas de estas propiedades son invariantes también con respecto a transformaciones más generales del espacio $\mathbb{R}^3$ y precisamente con respecto a transformaciones afines y se denominan *propiedades afines*. Toda *transformación afín* que traslada el punto $M(x, y, z)$ al punto $M'(x', y', z')$ se representa del modo

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2,$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3,$$

donde la matriz (a_{ij}) es regular. Pero si la matriz (a_{ij}) es ortogonal, entonces esta transformación es un *movimiento*.

928. Sea $\mathcal{A}$ una transformación afín del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $r = r(t)$ una curva en $\mathbb{R}^3$. Entonces la composición $\mathcal{A} \circ r(t)$ es curva en $\mathbb{R}^3$. Demuéstrese esto.

929. Demostrar que una transformación afín hace pasar una línea a otra, o sea, el concepto de línea es afín.

930. Demostrar que una transformación afín hace pasar una superficie a otra, o sea, el concepto de superficie es afín.

931. Si (U, r) es parametrización de la superficie S y $\mathcal{A}$ es una transformación afín, entonces $(U, \mathcal{A} \circ r)$ es la parametrización de la superficie $\mathcal{A}(S)$. Demuéstrese esto.

932. Mostrar que el concepto de tangente a una línea es afín.

933. Mostrar que el concepto de plano tangente a una superficie es afín, o sea, un plano tangente a una superficie pasa con una transformación afín a un plano tangente a la superficie transformada.

934. Si una familia monoparamétrica de líneas sobre un plano o de superficies en un espacio tiene envolvente, entonces la familia que se obtiene como resultado de una transformación afín también tiene una envolvente que es la imagen de la envolvente de la familia inicial. Demuéstrese esto.

935. Mostrar que el concepto de superficie reglada es afín.

936. Demostrar que una superficie desarrollable con la transformación afín pasa a otra superficie desarrollable, con ello la arista de retroceso de la superficie inicial pasa a la arista de retroceso de la superficie transformada.

937. Demostrar que una superficie reglada oblicua con la transformación afín pasa a la otra superficie reglada oblicua.

938. Mostrar que el concepto de plano osculador de una línea es afín.

939—957. Averiguar cuáles entre los conceptos indicados son afines y cuáles son métricos:

(939) Línea plana.

(940) Curvatura de una línea.

(941) Evoluta de una línea plana.

(942) Torsión de una línea.

(943) Normal de una línea.

(944) Binormal de una línea.

(945) Plano normal de una línea.

(946) Plano rectificante de una línea.

(947) Direcciones conjugadas y asintóticas en un punto dado de una superficie.

(948) Líneas asintóticas en una superficie.

(949) Líneas de curvatura en una superficie.

(950) Líneas geodésicas en una superficie.

(951) Curvatura total de una superficie.

(952) Curvatura media de una superficie.

(953) Superficie de curvatura total nula.

(954) Superficie de curvatura media nula (superficie mínima).

(955) Puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos de una superficie.

(956) Puntos de redondeo de una superficie.

(957) Puntos de aplanamiento de una superficie.

958. Hallar la envolvente de una familia de rectas que unen los extremos de los pares de diámetros conjugados de una elipse.

959. Hallar la ecuación de la envolvente de una familia de rectas que pasan por los pares de tales puntos de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

que junto con el centro de la elipse determinan sectores elípticos de un área constante S.

960. Hallar la ecuación de la envolvente de una familia de rectas que separan de dos rectas intersecadas bajo el ángulo 2α triángulos de área constante S.

961. Hallar la envolvente de una familia de rectas que cortan de la parábola dada $y=ax^2$ segmentos de área constante S.

962. Demostrar que la figura engendrada por las tangentes a las líneas asintóticas de una superficie reglada oblicua a lo largo de una generatriz de superficie es un hiperboloide de una hoja o un paraboloide hiperbólico.

CAPITULO 6

Elementos de la teoría del campo

§ 20. Campo escalar

El campo escalar se determina por la función escalar

$$u = u(P) = u(x, y, z) = u(r),$$

donde $P(x, y, z)$ es un punto del espacio y

$$r = xi + yj + zk$$

su radio vector.

El campo $u = u(P)$ se llama *plano* si existe tal sistema de coordenadas que la función u no depende de z, o sea

$$u = u(x, y).$$

Tal campo admite valores iguales sobre cada recta paralela al eje Oz, por eso se suele examinar sólo en el plano xOy.

Las superficies

$$u(x, y, z) = C,$$

donde $C = \text{const}$ se denominan *superficies de nivel del campo escalar*.

En caso de un campo plano las superficies de nivel

$$u(x, y) = C \qquad (1)$$

son superficies cilíndricas con las generatrices paralelas al eje Oz.

Si el campo plano se examina solamente en el plano xOy, entonces la ecuación (1) define la colección de sus *líneas de nivel*. Si la función

$$u(r) = u(x, y, z)$$

que determina un campo escalar es diferenciable continuamente, entonces, se llama *gradiente* de este campo al campo vectorial

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

El gradiente del campo u en un punto dado $P(x, y, z)$ está orientado por la normal a la superficie de nivel

$$u(x, y, z) = C$$

que pasa por el punto P. Para cada punto este vector ofrece la velocidad máxima de variación de la función u en cuanto al valor

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

y la dirección. El gradiente del campo escalar se designa también con el símbolo ∇u, donde el signo ∇ se lee: «nabla». Ahora bien,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

∇ se puede considerar como un operador diferencial (*operador de Hamilton*):

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

el cual, siendo aplicado al escalar u, da el grad u. Este operador es cómodo considerarlo como vector simbólico y aplicarle las reglas ordinarias del álgebra vectorial. Por ejemplo,

$$r \cdot \nabla = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

La derivada del campo escalar $u(P)$ *por la dirección* l definida por el vector

$$a = a_x i + a_y j + a_z k$$

se calcula con ayuda de la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

donde

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|},$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

La derivada direccional está relacionada con el gradiente del campo vectorial por la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial l} = a_0 \cdot \text{grad } u,$$

donde a_0 es el vector unitario de la dirección dada.

El punto en que la derivada del campo excalar en toda dirección es igual a cero se llama *punto estacionario* de este campo.

963—967. Hallar las líneas de nivel de los campos planos (que se examinan solamente en el plano xOy):

(963) $u = x^2 + y^2$. (964) $u = x^2 - y^2$.

(965) $u = y/x^2$. (966) $u = 2x/(x^2 + y^2)$.

(967) $u = (2x - y + 1)/x^2$.

968—71. Hallar las superficies de nivel de los campos escalares siguientes:

(968) $u = x + y + z$.

(969) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(970) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

(971) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$.

972. Hallar la derivada del campo escalar

$$u = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$$

en el punto M (1, 2) en la dirección del vector que une este punto con el punto N (4, 6).

973. Hallar la derivada del campo escalar

$$u = xy^2 + z^3 - xyz$$

en el punto M (1, 1, 2) en la dirección que forma con los ejes de coordenadas los ángulos $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

974—975. Hallar los puntos estacionarios de los campos escalares siguientes:

(974) $u = x^3 + y^3 - 3xy$.

(975) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

976—979. Hallar los gradientes de los campos escalares siguientes:

(976) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$.

(977) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz$.

(978) $u = xyze^{x+y+z}$.

(979) $u = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-xz}$.

980. Hallar el gradiente del campo escalar $u = x^3 + y^3 - 3xy$ en el punto $M(2, 1)$.

981. Hallar el valor y la dirección del gradiente del campo escalar $u = x^2 + y^2 + z^2$ en el punto $M(2, -2, 1)$.

982. Hallar el valor y la dirección del gradiente del campo escalar $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ en los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 1)$. ¿En qué punto el gradiente es igual a cero?

983—984. Hallar el ángulo comprendido entre los gradientes de los campos escalares indicados en los puntos dados:

(983) $u = \ln(y/x)$, $A(1/2, 1/4)$, $B(1, 1)$.

(984) $u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $A(1, 2, 2)$, $B(-3, 1, 0)$.

985. Hallar el ángulo comprendido entre los gradientes de los campos $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = \operatorname{arcsen} \frac{x}{x+y}$ en el punto $M(1, 1, \sqrt{7})$.

986. Determinar el carácter de crecimiento del campo escalar $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ en la dirección del vector $a = 8i - 4j + 8k$ en el punto $M(1, 1, 1)$; hallar la velocidad de variación del campo dado.

987. Hallar los puntos en que el gradiente de la función $u = \ln\left(y + \frac{1}{x}\right)$ es igual a $-\frac{25}{16}i + j$.

988. Hallar la derivada del campo $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección de su radio vector r. ¿En qué caso esta derivada es igual al valor del gradiente?

989. Hallar la derivada del campo escalar $u = u(x, y, z)$ en la dirección del gradiente del campo $v = v(x, y, z)$. ¿En qué caso ella será igual a cero?

990—996. Demostrar la certeza de las fórmulas siguientes:

(990) $\operatorname{grad} c = 0$, $c = \text{const}$.

(991) grad $(u+v) = \text{grad}\, u + \text{grad}\, v$.

(992) grad $(uv) = v\, \text{grad}\, u + u\, \text{grad}\, v$.

(993) grad $(cu) = c\, \text{grad}\, u$, c — const.

(994) $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, \text{grad}\, u - u\, \text{grad}\, v}{v^2}$.

(995) grad $f(u) = f'(u)\, \text{grad}\, u$.

(996) grad $u^n = nu^{n-1}\, \text{grad}\, u$.

997—1004. Hallar el gradiente del campo escalar que depende de $r = |\boldsymbol{r}|$, en cada uno de los casos siguientes:

(997) grad r.

(998) grad $f(r)$.

(999) grad r^n, n es un número natural.

(1000) grad $(1/r)$.

(1001) grad $\ln r$.

(1002) grad $(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{c}$ = const.

(1003) grad $((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})/(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}))$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ = const.

(1004) grad $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})^2$, $\boldsymbol{c}$ = const.

1005—1007. Demostrar la certeza de las fórmulas siguientes:

(1005) grad $f(u, v, w) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\, \text{grad}\, u + \frac{\partial f}{\partial v}\, \text{grad}\, v + \frac{\partial f}{\partial w}\, \text{grad}\, w.$$

(1006) $(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\, r^n = nr^n$. (1007) $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}$.

1008. Hallar la fórmula para calcular el gradiente del campo escalar $f(u, v, w)$ definido por una función de tres coordenadas ortogonales curvilíneas.

1009. Hallar la fórmula para calcular el gradiente del campo escalar en las coordenadas cilíndricas.

1010—1014. Hallar los gradientes de los campos escalares siguientes en las coordenadas cilíndricas:

(1010) $u = z + r\varphi$. (1011) $u = zr\varphi$.

(1012) $u = z \operatorname{sen} \varphi + r$. (1013) $u = z \cos \varphi + r^2$.

(1014) $u = z \operatorname{sen}^2 \varphi + r^3$.

1015. Hallar la fórmula para calcular el gradiente del campo escalar en las coordenadas esféricas.

1016—1020. Hallar los gradientes de los campos escalares siguientes en las coordenadas esféricas:

(1016) $u = \rho\varphi$. (1017) $u = \rho\theta$.

(1018) $u = \rho\theta\varphi$. (1019) $u = \varphi \operatorname{sen} \theta + \rho$.

(1020) $u = \theta \cos \varphi + \rho$.

§ 21. Campo vectorial

El campo vectorial se determina por la función vectorial del punto $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$, donde $P(x, y, z)$ es un punto del espacio, y

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

es su radio vector.

Llámase *línea vectorial* de un campo a la que tiene en cada punto una tangente con la dirección del vector $\boldsymbol{a}(P)$.

Las líneas vectoriales (*líneas de fuerza*, *líneas de corriente*) de un campo vectorial se determinan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Denomínase *divergencia* del campo vectorial

$$\boldsymbol{a}(P) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

a la función escalar

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \boldsymbol{a}.$$

Llámase *rotación* (*rotor*) del campo vectorial $\boldsymbol{a}(P)$ al campo vectorial

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

o bien en la forma simbólica

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Denomínase *flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{a}(P)$ a través de una superficie S en la dirección determinada por el vector unitario de la normal

$$\boldsymbol{n}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

con respecto a la superficie S, a la integral

$$\Pi = \iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_S a_n\, d\sigma = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\, d\sigma,$$

donde a_n es el valor de la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el sentido del vector $\boldsymbol{n}$.

Sea S una superficie cerrada que acota una región V y sea $\boldsymbol{n}$ el vector unitario de la normal exterior a ella, entonces es válida la *fórmula de Ostrogradski*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dw = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\, d\sigma,$$

o, en forma vectorial,

$$\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\, dw = \iint_S a_n\, d\sigma.$$

La integral lineal del vector $\boldsymbol{a}$ por la línea L se define por la fórmula

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_L a_s\, ds = \int_L a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz,$$

donde a_s es la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre la tangente a L. La integral lineal expresa el *trabajo del campo vectorial $\boldsymbol{a}$* a lo largo de la línea L. Si la línea L es cerrada, entonces la integral lineal se llama *circulación del campo vectorial $\boldsymbol{a}$* a lo largo del contorno L.

Si la línea cerrada L es el contorno de una superficie orientada S, entonces es válida la *fórmula de Stokes*

$$\oint_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\, d\sigma,$$

donde n es el campo vectorial unitario de las normales a la superficie que determina la orientación de S, y la orientación de L concuerda con la de S.

El campo vectorial $a(r)$ se dice *potencial* si

$$a = \operatorname{grad} u,$$

donde $u = u(r)$ es la función escalar (*potencial del campo vectorial* a).

Para el campo vectorial potencial a definido en una región simplemente conexa es necesario y suficiente que

$$\operatorname{rot} a = 0.$$

En este caso el potencial u se determina por la ecuación

$$du = a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz.$$

Si el potencial u se determina unívocamente, entonces

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} a \cdot dr = u(B) - u(A);$$

en particular, la circulación del campo vectorial a a lo largo de cualquier contorno cerrado es igual a cero.

El campo vectorial $a(r)$ se llama *solenoidal* si en cada punto suyo

$$\operatorname{div} a = 0;$$

en este caso el flujo del vector a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a cero.

Si el campo es a la vez potencial y solenoidal, entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$$

y la función potencial u es *armónica*, o sea, satisface la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

o bien

$$\Delta u = 0,$$

donde

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es el *operador de Laplace*.

1021—1025. Hallar las líneas vectoriales de los campos vectoriales siguientes:

(1021) $\boldsymbol{a} = -cy\boldsymbol{i} + cx\boldsymbol{j}$, $c = \text{const}$.

(1022) $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$.

(1023) $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$.

(1024) $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$.

(1025) $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

1026—1027. Hallar la divergencia de los campos vectoriales siguientes:

(1026) $\boldsymbol{r} = xyz\boldsymbol{i} + (2x + 3y + z)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + z^2)\,\boldsymbol{k}$.

(1027) $\boldsymbol{r} = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)\,\boldsymbol{i} + (4x^3y + xz + 2)\,\boldsymbol{j} + (xy - 3xz^2 - 3)\,\boldsymbol{k}$.

1028—1032. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes:

(1028) $\operatorname{div} \boldsymbol{c} = 0$, $\boldsymbol{c} = \text{const}$.

(1029) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b}$.

(1030) $\operatorname{div}(c\boldsymbol{a}) = c \operatorname{div} \boldsymbol{a}$, $c = \text{const}$.

(1031) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad} u$.

(1032) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}\cdot\operatorname{grad} u$, $\boldsymbol{c} = \text{const}$.

1033—1040. Hallar la divergencia del campo vectorial en los casos siguientes:

(1033) $\operatorname{div} \boldsymbol{r}$.

(1034) $\operatorname{div}(f(r)\,\boldsymbol{r})$.

(1035) $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}/r)$.

(1036) $\operatorname{div}(r^n\boldsymbol{r})$.

(1037) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$.

(1038) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

(1039) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$.

(1040) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

1041—1046. Suponiendo que $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{c}_1$ son vectores constantes, hallar la divergencia del campo vectorial en los casos siguientes:

(1041) $\operatorname{div}(r\boldsymbol{c})$.

(1042) $\operatorname{div}(r^2\boldsymbol{c})$.

(1043) $\operatorname{div}(f(r)\,\boldsymbol{c})$.

(1044) $\operatorname{div}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c})$.

(1045) $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}_1)\,\boldsymbol{c}$

(1046) $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{r}$.

1047—1048. Suponiendo que $\boldsymbol{e}$ es un vector unitario constante, calcular:

(1047) $\operatorname{div}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e}$. (1048) $\operatorname{div}(\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}))$.

1049. Hallar

$$\operatorname{div}\frac{x+y+z}{xyz}\,\boldsymbol{r}.$$

1050—1051. Hallar las funciones $f(r)$ que satisfacen las ecuaciones siguientes:

(1050) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0$.

(1051) $2r \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = \operatorname{div}(\boldsymbol{r}/r)$.

1052. Hallar la fórmula para la divergencia del vector $\boldsymbol{a}$ en coordenadas curvilíneas ortogonales u, v, w, si sus coordenadas cartesianas rectangulares x, y, z se expresan por las fórmulas

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

1053. Hallar la expresión para $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ en coordenadas cilíndricas.

1054. Hallar la expresión para $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ en coordenadas esféricas.

1055—1056. Hallar la rotación de los campos vectoriales siguientes:

(1055) $\boldsymbol{a} = y^2z\boldsymbol{i} + z^2x\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$.

(1056) $\boldsymbol{a} = xyz\boldsymbol{i} + (2x + 3y - z)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + z^2)\,\boldsymbol{k}$.

1057—1059. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes:

(1057) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

(1058) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \operatorname{grad} u \times \boldsymbol{a}$.

(1059) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

1060—1067. Suponiendo que $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{c}_1$ son vectores constantes, hallar la rotación del campo vectorial en los casos siguientes:

(1060) $\operatorname{rot}\boldsymbol{c}$. (1061) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}$.

(1062) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c})$. (1063) $\operatorname{rot}((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{r})$

(1064) rot $((r \cdot c_1)\, c)$. (1065) rot $((c \times r) \times c_1)$.

(1066) rot $(f(r)\, r)$. (1067) rot $(f(r)\, c)$.

1068—1071. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes:

(1068) rot (grad u) = o.

(1069) div (rot a) = 0.

(1070) div (grad u) = Δu.

(1071) rot rot a = grad div $a - \Delta a$,

donde

$$\Delta a = \Delta a_x i + \Delta a_y j + \Delta a_z k.$$

1072. Valiéndose de la fórmula de Ostrogradski, demostrar que el flujo del campo vectorial $a = r$ a través de la superficie cerrada que acota un volumen arbitrario V, es igual a $3\,V$.

1073. Calcular el flujo del campo vectorial $a = xy^2 i + x^2 y j + zk$ a través de la superficie cerrada engendrada por los planos de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y por la parte de la superficie del paraboloide $4 - z = x^2 + y^2$, que está en el primer octante.

1074. Calcular el flujo del campo vectorial $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$, a través de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

1075. Calcular el flujo del campo de intensidad

$$E = \frac{qr}{r^3}$$

de la carga puntual q, a través de una esfera de radio a con centro en el punto de la carga.

1076. Calcular el flujo del campo de intensidad

$$E = \frac{qr}{r^3}$$

de la carga puntual q, a través de una superficie cerrada S que no contenga en su interior la carga q.

1077. Calcular el flujo del campo vectorial $a = xyi + (y + z)\, j + (x + 2z)\, k$, a través de la parte del plano $2x + y + z = 2$ que está en el primer octante.

1078. Calcular el flujo del vector $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$:

a) a través de la superficie lateral del cono

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2} \qquad (0 \leqslant z \leqslant H);$$

b) a través de la superficie total del cono indicado.

1079. Si S es una superficie cerrada que acota un volumen V y si a y b son vectores constantes, entonces

$$\iint_S (a \cdot r)\, b_n\, d\sigma = (a \cdot b)\, V.$$

Demuéstrese esto.

1080. Calcular la integral lineal del vector $a = x^3 i - y^3 j$ a lo largo del primer cuarto de la circunferencia $r = R \cos t i + R \operatorname{sen} t j$.

1081. Calcular la integral lineal del vector r a lo largo de una espira de la hélice $x = a \cos \varphi$, $y = a \operatorname{sen} \varphi$, $z = b\varphi$, desde $\varphi = 0$ a $\varphi = 2\pi$.

1082. Calcular la circulación del campo vectorial $a = yi - xj$ a lo largo de la línea cerrada L engendrada por los ejes de coordenadas y por el primer cuarto de la astroide $r = R \cos^3 t i + R \operatorname{sen}^3 t j$.

1083. Calcular la circulación del campo vectorial $a = y^2 i$ por la línea cerrada constituida por la mitad derecha de la elipse $r = b \cos t i + c \operatorname{sen} t j$ y por el segmento del eje Oy.

1084. Calcular la circulación del campo vectorial $a = yi$ por el contorno de la circunferencia $r = b \cos t i + (b + b \operatorname{sen} t) j$.

1085. Calcular la circulación del campo vectorial $a = -yi + xj + ck$, donde $c = \text{const}$:

a) a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$;

b) a lo largo de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

1086. Con ayuda de la fórmula de Stokes calcular la circulación del campo vectorial $a = x^2 y^3 i + j + zk$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, tomando en calidad de superficie acotada por la circunferencia dada la semiesfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

1087—1089. Calcular, tiene, o no el campo vectorial dado el potencial u y hallar u, si existe:

(1087) $\boldsymbol{a} = (5x^2y - 4xy)\,\boldsymbol{i} + (3x^2 - 2y)\,\boldsymbol{j}$.

(1088) $\boldsymbol{a} = (y + z)\,\boldsymbol{i} + (x + z)\,\boldsymbol{j} + (x + y)\,\boldsymbol{k}$.

(1089) $\boldsymbol{a} = yz\,(2x + y + z)\,\boldsymbol{i} + xz\,(x + 2y + z)\,\boldsymbol{j} + xy\,(x + y + 2z)\,\boldsymbol{k}$.

1090. ¿Será solenoidal el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r})$, donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante?

1091. Demostrar que el campo vectorial $\boldsymbol{a} = f\,(r)\,\boldsymbol{r}$ será solenoidal solamente para $f\,(r) = k/r^3$, donde $k = \text{const}$.

Respuestas

8. Sí. Lo contrario es falso. Efectivamente, la función vectorial definida en un semiplano abierto por la fórmula

$$r(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), & \text{si } x \geqslant 0,\ y > 0, \\ \left(-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), & \text{si } x < 0,\ y > 0, \end{cases}$$

es discontinua en los puntos del semieje Oy, aunque $|r(x, y)| = 1$, o sea, la función $|r(x, y)|$ es continua.

21. $2r \cdot r'$. 22. $2r' \cdot r''$. 23. $r' \times r'''$.

24. $r'r''r^{(4)}$. 25. $(r' \times r''') \times r''' + (r' \times r'') \times r^{(4)}$.

26. $(r \cdot r') : \sqrt{r^2}$.

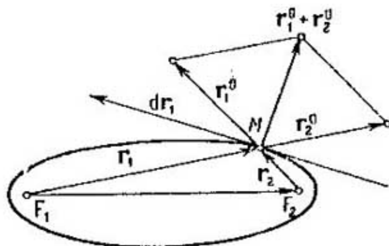


Fig. 4.

27. Designemos $r_1 = \overrightarrow{F_1M}$, $r_2 = \overrightarrow{F_2M}$ (fig.4). Entonces $r_1 = \overrightarrow{F_1F_2} + r_2$. Diferenciando esta igualdad, obtenemos

$$dr_1 = dr_2. \tag{*}$$

Por definición de elipse $r_1 + r_2 = 2a$. Diferenciamos: $dr_1 + dr_2 = 0$. Entonces

$$r_1^0 \cdot dr_1 + r_2^0 \cdot dr_2 = 0, \tag{**}$$

donde

$$r_1^0=\frac{r_1}{r_1}, \qquad r_2^0=\frac{r_2}{r_2}.$$

De las igualdades (*) y (**) se deduce

$$(r_1^0+r_2^0)\cdot dr_1=0. \qquad (***)$$

El vector $r_1^0+r_2^0$ va por la bisectriz del ángulo comprendido entre las rectas $\overrightarrow{F_1M}$ y $\overrightarrow{F_2M}$. Pero en virtud de (***) el vector dr_1 es perpendicular al vector $r_1^0+r_2^0$ y, por lo tanto, va por la segunda bisectriz del ángulo indicado.

28. 1.

29. No, no se deduce. Si $r(t_0)=0$ para cierto $t=t_0$, entonces la derivada $r'(t_0)$ no existe.

30. a) No, como muestra el ejemplo de la función vectorial $r(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$; b) sí.

33. La necesidad es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea

$$r'(t)=\varphi(t)\,r(t). \qquad (*)$$

Hacemos

$$r(t)=\psi(t)\,e(t), \qquad (**)$$

donde $|e(t)|=1$. Diferenciando la igualdad (**) y valiéndose de (*), obtenemos

$$\psi' e+\psi e'=\varphi\psi e.$$

Multiplicando esta igualdad escalarmente por e', encontramos $\psi e'^2=0$. Como $\psi\neq 0$, entonces $(e')^2=0$ y $e=\text{const}$.

34. Designemos con a el vector unitario ortogonal a tres vectores coplanares r', r'', r'''. Entonces $a\cdot r'=0$, $a\cdot r''=0$, $a\cdot r'''=0$, de donde $a'\cdot r'+a\cdot r''=0$, o bien $a'\cdot r'=0$, y $a'\cdot r''+a\cdot r'''=0$, o bien $a'\cdot r''=0$. En consecuencia, $a'\perp r'$ y $a'\perp r''$, o sea, $a\parallel a'$ y, por consiguiente, $a=\text{const}$. Ahora de la relación $a\cdot r'=0$ hallamos $(a\cdot r)'=0$, es decir, $a\cdot r=\text{const}$; por lo tanto, la curva se encuentra en el plano (perpendicular al vector a).

OBSERVACIÓN. La función vectorial a tiene derivada, ya que $a=(r'\times r'')/|r'\times r''|$ y según el enunciado la función vectorial r tiene derivadas de hasta tercer orden inclusive.

35. De acuerdo con el problema 33 $r'(t)=\varphi(t)\,a$, $a=\text{const}$. De aquí

$$r(t)=\int\varphi(t)\,dt\,a+b. \qquad (*)$$

Si t se cambia sobre el segmento $[t_1, t_2]$, entonces la ecuación (*) define el segmento de la recta.

36. Tomemos como origen del sistema de coordenadas un punto con radio vector r_0, y los vectores r_1 y r_2 los consideramos vectores

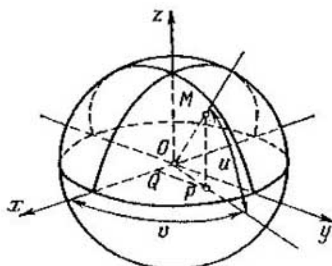


Fig. 5.

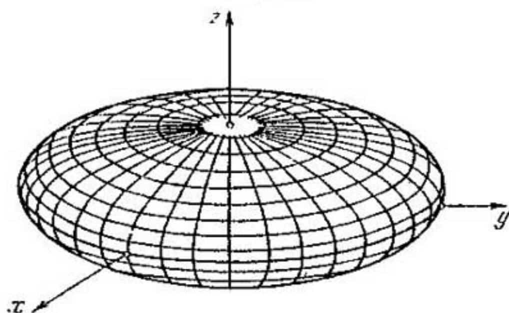


Fig. 6.

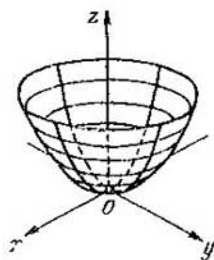


Fig. 7.

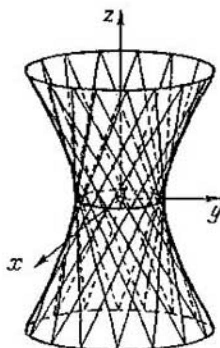


Fig. 8.

básicos de los ejes Ox y Oy (hablando en general, el sistema de coordenadas no es rectangular). Entonces las ecuaciones paramétricas de la curva serán $x = t$, $y = t^2$. Por consiguiente, $y = x^2$. Es la ecuación de una parábola. En el caso de colinealidad de los vectores r_1 y r_2 obtendremos una semirrecta o recta.

37. Segmento de una recta.

38. Un haz si $r_1 \neq 0$ y una recta si $r_1 = 0$.

39. Si la trayectoria $r = r(t)$ de un punto material de masa m se describe bajo la acción de una fuerza central F, entonces $F = mr'' = ar$, donde $a = a(t)$ es cierta función escalar. Queda por demostrarse que si la $r(t)$ de cierto punto móvil satisface la condición

$$mr'' = ar, \qquad (*)$$

entonces la trayectoria de movimiento es plana.

Derivando la igualdad (*) con respecto a t:

$$mr''' = a'r + ar' = m\frac{a'}{a}r'' + ar',$$

o sea, en cada momento dado los vectores r', r'', r''' son coplanares. Si los vectores r' y r'' no son colineales, entonces la trayectoria será plana en virtud del problema 34. Pero, si r' y r'' son colineales, entonces en vista del problema 35, la trayectoria será rectilínea.

40. La demostración se deduce del hecho de que para la función $y = x^3$ la función inversa no es suave.

45. Sea $(I, r = r(t))$, donde $I = [\alpha, \beta]$ es la parametrización de la curva γ. Entonces la parametrización $(J, \rho = \rho(\tau))$, donde $J = [-\beta, -\alpha]$, $\rho(\tau) = r(-\tau)$, es equivalente a (I, r). Las parametrizaciones (I, r) y (J, ρ) determinan diferentes curvas orientadas. Toda parametrización de la curva γ está vinculada a la sustitución de la parametrización por una derivada positiva, ya sea con (I, r) o con (J, ρ).

49. La necesidad es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea r_0 un valor fijo arbitrario de la función vectorial dada y sea n un vector unitario, ortogonal al plano dado. Entonces $\partial_u r \cdot n = 0$, $\partial_v r \cdot n = 0$. Examinemos la función $f(u, v) = (r(u, v) - r_0) \cdot n$. Tenemos $\partial_u f = \partial_u r \cdot n = 0$, $\partial_v f = \partial_v r \cdot n = 0$. Así pues, $f(u, v) = \text{const}$. Pero $f(u_0, v_0) = (r_0 - r_0) \cdot n = 0$, por eso $f(u, v) \equiv 0$, o sea, $(r - r_0) \cdot n = 0$. Es la ecuación de un plano.

50. Un cilindro parabólico.

51. Un cilindro elíptico.

52. Un cilindro hiperbólico.

53. Un paraboloide elíptico.

55. $x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u \operatorname{sen} v$, $z = R\operatorname{sen} u$ (fig. 5).

56. $x = a\cos u\cos v$, $y = b\cos u\operatorname{sen} v$, $z = c\operatorname{sen} u$ (fig. 6).

57. $x = \sqrt{pu}\cos v$, $y = \sqrt{qu}\operatorname{sen} v$, $z = u^2/2$ (fig. 7).

58. $x = a\operatorname{ch} u\cos v$, $y = b\operatorname{ch} u\operatorname{sen} v$, $z = c\operatorname{sh} u$ (fig. 8.).

59. $x = a\operatorname{sh} u\cos v$, $y = b\operatorname{sh} u\operatorname{sen} v$, $z = c\operatorname{ch} v$ (fig. 9).

60. $x = a\cos v$, $y = b\operatorname{sen} v$, $z = u$ (fig. 10).

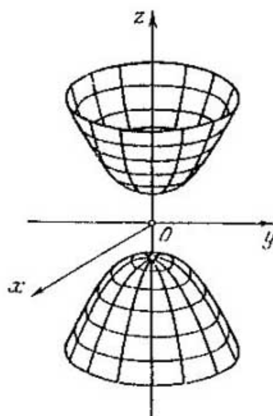


Fig. 9.

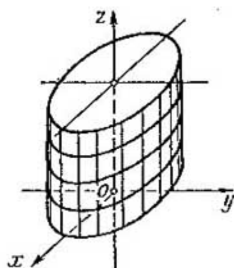


Fig. 10.

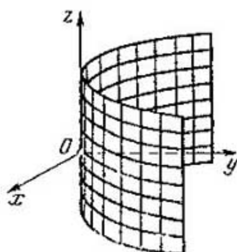


Fig. 11.

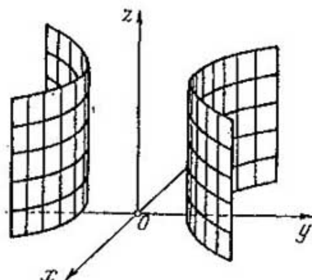


Fig. 12.

61. $x = u$, $y = u^2$, $z = v$ (fig. 11).
62. $x = a \operatorname{ch} u$, $y = b \operatorname{sh} u$, $z = v$ (fig. 12).
63. $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v$, $z = cu$ (fig. 13).
66. a) No. Por ejemplo, para la función vectorial

$$x = \frac{2au^2}{1+u^2}, \quad y = \frac{au(u^2-1)}{1+u^2}, \quad z = v$$

el conjunto indicado es un cilindro cuya directriz es una estrofoide.

67. a) Plano con rayo lanzado; b) $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$; c) $u = r\cos\varphi$, $v = r\operatorname{sen}\varphi$.

68. Escojamos en calidad de eje Ox la recta que pasa por los puntos F_1, F_2 (fig. 14) y que está orientada desde el punto F_1 al punto F_2.

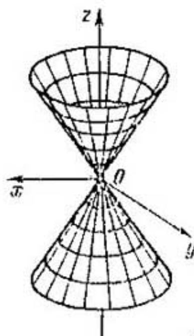


Fig. 13.

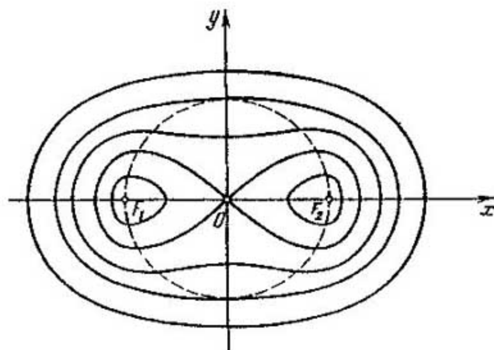


Fig. 14.

Tomemos por origen de coordenadas el centro del segmento F_1F_2. Entonces: $F_1(-b, 0)$, $F_2(b, 0)$. Para un punto arbitrario $M(x, y)$ de la figura buscada tenemos

$$|F_1M| = \sqrt{(x+b)^2+y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x-b)^2+y^2}.$$

Según el enunciado del problema

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2}\,\sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2. \qquad (*)$$

Esto es precisamente la ecuación de la figura buscada. Racionalizando:

$$[(x+b)^2+y^2]\,[(x-b)^2+y^2] = a^4. \qquad (**)$$

Es evidente que las ecuaciones (*) y (**) son equivalentes. Suprimiendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos

$$(x^2+y^2)^2 - 2b^2(x^2-y^2) = a^4 - b^4,$$

o sea, la ecuación de los *óvalos de Cassini* (véase la fig. 14). Sustituyendo aquí las expresiones de las coordenadas rectangulares cartesianas por las polares $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$, obtenemos

$$r = b\sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\frac{a^4}{b^4} - \operatorname{sen}^2 2\varphi}},$$

o sea la ecuación de la figura buscada en coordenadas polares. Si $a = b$ la figura se llama *lemniscata de Bernoulli* (fig. 15). Sus ecuaciones son

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2),\ r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Si $a < b$, la figura no será imagen de una curva ni línea. La lemniscata de Bernoulli ($a = b$) es imagen de una curva, pero no es una línea. Cuando $a > b$, el óvalo de Cassini es línea e imagen de una curva.

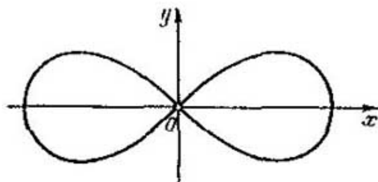


Fig. 15.

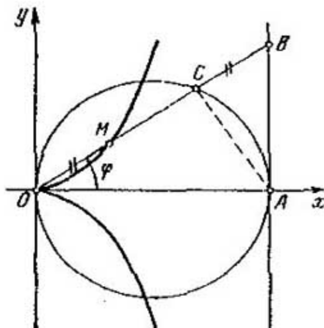


Fig. 16.

69. $x^3 = y^2 (2a - x)$, $r = 2a \operatorname{sen}^2 \varphi / \cos \varphi$ (fig. 16). Las ecuaciones paramétricas se pueden reducir a la forma

$$x = 2a \operatorname{sen}^2 \varphi,\ y = 2a \operatorname{sen}^3 \varphi / \cos \varphi,$$

o bien

$$x = \frac{2a}{1+t^2},\quad y = \frac{2a}{t(1+t^2)}\quad (t = \operatorname{ctg} \varphi).$$

La cisoide de Diocles no es línea.

70. $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$; $\quad x = a \operatorname{ctg} t, \quad y = a \operatorname{sen}^2 t$ (fig. 17).

71. $r = a\varphi$ (fig. 18).

72. $r = r_0 e^{h\varphi}$, donde $\varphi = \omega t$ (fig. 19).

73. $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$, $r = a \operatorname{sen} 2\varphi$ (fig. 20). La rosa de cuatro pétalos es la imagen de una curva, pero no es una línea.

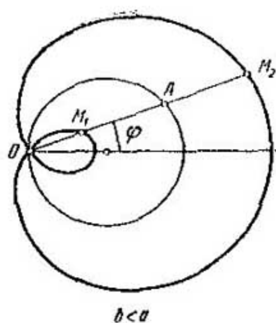
74. $r = 2a \cos \varphi \pm 2b$, $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4b^2 (x^2 + y^2)$ (fig. 21) para la cardioide $b = a$ (fig. 22). El caracol de Pascal es una línea para $b > a$.

Fig. 17.

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.



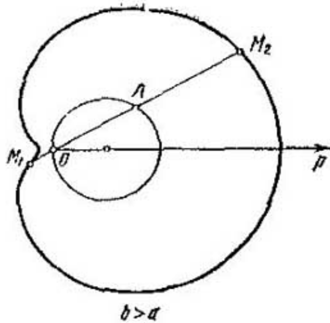


Fig. 21.

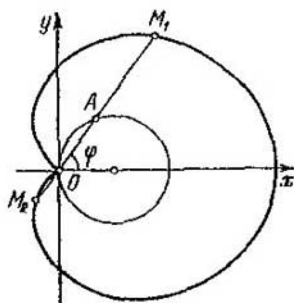
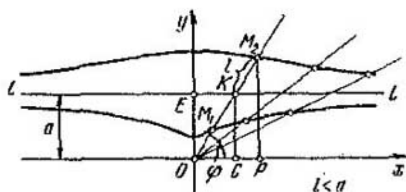
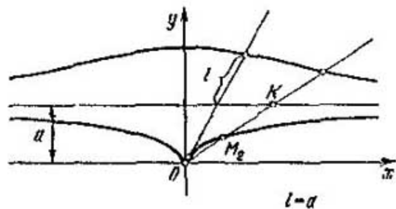


Fig. 22.





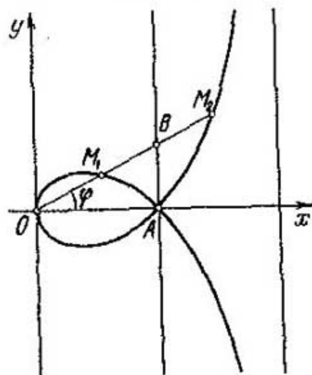


Fig. 23.

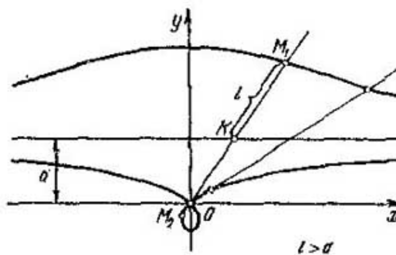


Fig. 24.

75. $r=\frac{a(1\pm \operatorname{sen}\varphi)}{\cos\varphi}$; $y^2=\frac{x(x-a)^2}{2a-x}$;

$$x=\frac{2at^2}{1+t^2},\quad y=\frac{at(t^2-1)}{1+t^2},\quad t=\frac{r}{a}.$$

La estrofoide Φ (fig. 23) es una curva, pero no es una línea. La figura $\Phi\setminus A$ es una línea, pero no es una curva.

76. $r=\frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}\pm l$; $(x^2+y^2)(y-a)^2-l^2y^2=0$ (fig. 24). Ninguna concoide de Nicomedes es la imagen de una curva. La concoide es una línea cuando $l<a$.

77. $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$; $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (fig. 25). No.

78. $x=a(\cos t+t\operatorname{sen} t)$, $y=a(\operatorname{sen} t-t\cos t)$.

INDICACIÓN. Antes del desarrollo, el extremo del hilo se encontraba en el punto A (fig. 26). Durante el desarrollo el hilo tenso coincide con la tangente a la circunferencia, con ello la longitud de la tangente

$$|BM|=\overset{\frown}{BA}=at.$$

79. Planteemos la ecuación de la cicloide. Tomemos la recta indicada por eje Ox y supongamos que en la posición inicial el punto M coincide con el origen de las coordenadas (fig. 27). Examinemos una posición arbitraria del punto $M(x, y)$. Supongamos que el centro de la circunferencia se encuentra en el momento dado en un punto C, y que t es el ángulo que el radio CM engendra con la perpendicular CP trazada desde el punto C al eje Ox. Sea S la proyección del punto M sobre el eje Ox y sea N su proyección sobre CP.

Entonces

$$x=OS=OP-SP=\overset{\frown}{MP}-SP=at-a\operatorname{sen} t=a(t-\operatorname{sen} t).$$

Análogamente

$$y=SM=PN=PC-NC=a-a\cos t=a(1-\cos t).$$

En el caso general

$$x=at-d\operatorname{sen} t,\quad y=a-d\cos t \qquad \text{(fig. 28)}.$$

80. Coloquemos el origen de las coordenadas en el centro de la circunferencia fija. Supongamos que en la posición inicial el punto M coincide con el punto A en el cual la circunferencia rodante toca la fija, y hagamos que el eje de las abscisas pase por el punto A (fig. 29). Introduzcamos las designaciones: $t=\widehat{MO_1N}$, $m=r/R$. Como

$$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{MN},\quad \text{o bien}\quad R\cdot\widehat{NOA}=rt,\quad \text{entonces}\ \widehat{NOA}=\frac{r}{R}t=mt.$$

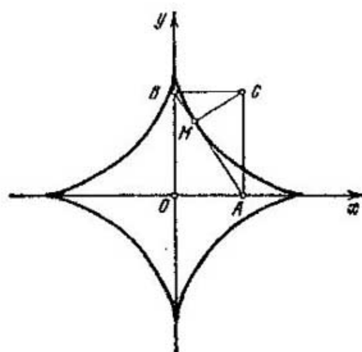


Fig. 25.

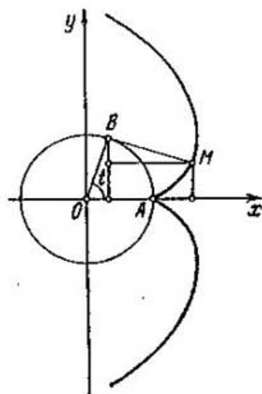


Fig. 26.

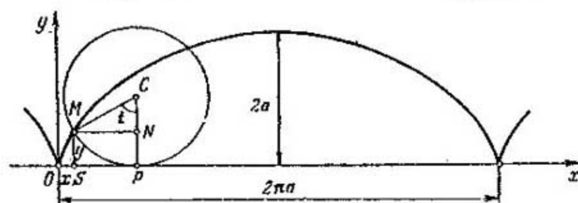


Fig. 27.

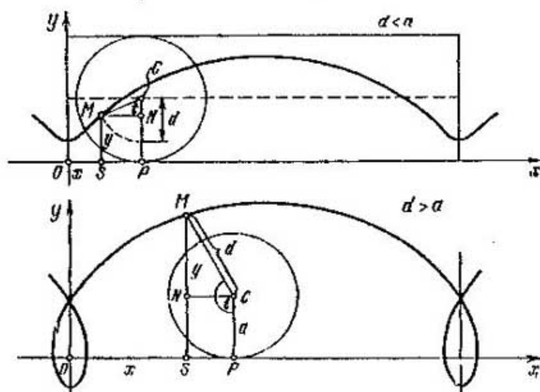


Fig. 28.

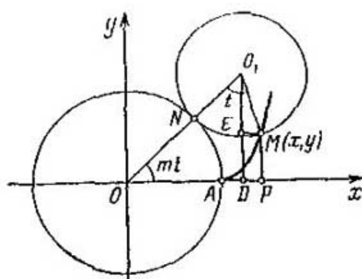


Fig. 29.

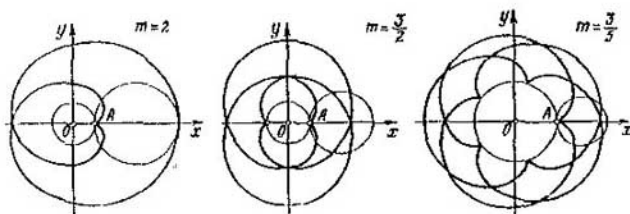


Fig. 30.

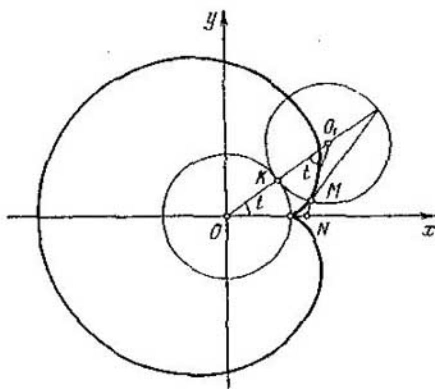


Fig. 31.

Fig. 32.

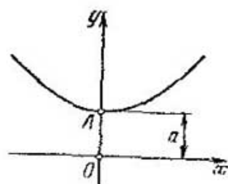


Fig. 33.

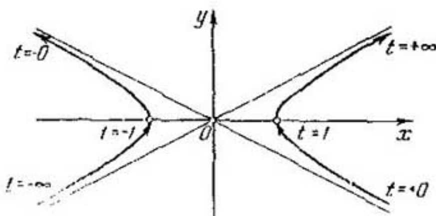


Fig. 34.

Tenemos

$$x = OP = OD + DP = OD + EM = (R + r)\cos mt + $$
$$+ r \operatorname{sen} \widehat{MO_1E},$$
$$y = MP = O_1D - O_1E = (R + r)\operatorname{sen} mt - r\cos \widehat{MO_1E}.$$

Puesto que

$$\operatorname{sen} \widehat{MO_1E} = \operatorname{sen}(t - \widehat{OO_1D}) = \operatorname{sen}\left[t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right] =$$
$$= -\cos(t + mt), \quad \cos \widehat{MO_1E} = \operatorname{sen}(t + mt), \quad r = mR,$$

entonces

$$x = (R + mR)\cos mt - mR\,(t + mt),$$
$$y = (R + mR)\operatorname{sen} mt - mR \operatorname{sen}(t + mt).$$

Eliminando m, obtenemos

$$x = (R + r)\cos\frac{r}{R}t - r\cos\frac{R + r}{R}t,$$
$$y = (R + r)\operatorname{sen}\frac{r}{R}t - r\operatorname{sen}\frac{R + r}{R}t \qquad \text{(fig. 30)}.$$

Cuando $r = R$ obtenemos la cardioide (fig. 31).

81. $x = (R - mR)\cos mt + mR\cos(t - mt),$
$y = (R - mR)\operatorname{sen} mt - mR\operatorname{sen}(t - mt), \; r = mR.$

Cuando $R = 4r$ obtenemos una *astroide*, cuando $R = 2r$ obtenemos el *segmento de una recta* (fig. 32).

82. Los puntos M y N descansan sobre la imagen de la curva, el punto P no se encuentra sobre ella. La curva corta al eje Ox en el punto O (0, 0) y al eje Oy, en los puntos O (0, 0) y A (0, −2). La ecuación implícita es: $y^3 + 2y^2 - x^2 = 0$.

83. a) $x = \dfrac{2a}{1 + k^2}, \quad y = \dfrac{2ak}{1 + k^2};$

b) $x = a + a\cos\varphi, \quad y = a\operatorname{sen}\varphi.$

84. Una parábola.

85. La parte de la recta $x - y - 2 = 0$, donde $x \geqslant 2$.

86. El segmento de la recta $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ comprendido entre los ejes de coordenadas.

87. Una semicircunferencia.

88. Rama de la hipérbola.

89. La recta $x + 2y - 1 = 0$.

90. $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, o sea, la línea llamada *catenaria* (fig. 33).
91. La circunferencia $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
92. $t = \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\varphi$ (fig. 34).
93. La elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; el paso de una representación a la otra lo obtendremos suponiendo que $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$ (fig. 35).

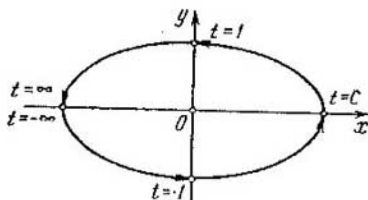


Fig. 35.

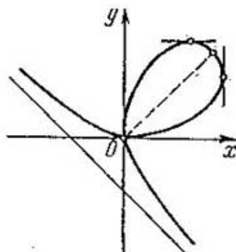


Fig. 36.

94. La circunferencia $x^2+y^2=16$.
95. La circunferencia $(x-a)^2+y^2=a^2$.
96. La recta $x=a$. 97. La recta $y=b$.

98. La elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

99. La hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

100. La parábola $y^2=4x+4$. 101. La hipérbola $x^2-y^2=a^2$.
102. La circunferencia $x^2+y^2-by=0$.
103. La parábola $y^2=-4x+4$. 104. La parábola $y^2=4x+4$.

105. $x=-\frac{\varphi_{n-1}(1,t)}{\varphi_n(1,t)}, \quad y=-\frac{t\varphi_{n-1}(1,t)}{\varphi_n(1,t)}$.

INDICACIÓN. Tomar como parámetro el coeficiente angular de la recta $y=tx$ que pasa por el origen de las coordenadas, y un punto de la línea.

106. $x=\frac{2a}{1+t^2}, \quad y=\frac{2at}{1+t^2}$.

107. $x=\frac{3at}{1+t^3}, \quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$; la curva se llama *folio de Descartes* (fig. 36).

108. $x=\frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y=\frac{2at^3}{1+t^2}$, o sea, la *cisoide de Diocles*.

109. $x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$, $y = a(1 + \cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$.
Suponiendo que $\operatorname{tg}(\varphi/2) = t$, obtenemos las ecuaciones de la cardioide

$$x = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{4at}{(1+t^2)^2}.$$

110. $x = \dfrac{a(t^2-1)}{t^2+1}$, $\quad y = \dfrac{at(t^2-1)}{t^2+1}$, o sea, una estrofoide. Las ecuaciones indicadas se obtienen de las ecuaciones del problema 75 haciendo $x = x' + a$, $y = y'$.

111. En el punto A la tangente $2x - y + 2 = 0$, la normal $x + 2y + 1 = 0$; en el punto B la tangente $4x - y + 3 = 0$, la normal $x + 4y - 12 = 0$; en el punto C la tangente $6x - y + 2 = 0$, la normal $x + 6y - 49 = 0$.

112. En el punto A la tangente $y = 0$, la normal $x = 0$; en el punto B la tangente $3x - y - 2 = 0$, la normal $x + 3y - 4 = 0$.

113. En el punto A $(0, 0)$ la tangente $y = x$, la normal $x = -y$; en el punto B $(\pi/2, 1)$ la tangente $y = 1$, la normal $x = \pi/2$; en el punto C $(\pi, 0)$ la tangente $x + y - \pi = 0$, la normal $x - y - \pi = 0$.

114. En el punto A $(0, 0)$ la tangente $y = x$, la normal $y = -x$; en el punto B $(\pi/4, 1)$ la tangente $2x - y + 1 - \dfrac{\pi}{2} = 0$, la normal $x + 2y - 2 - \dfrac{\pi}{4} = 0$.

115. La tangente $2x - y + 4 = 0$, la normal $x + 2y - 3 = 0$.

116. La tangente $2x \operatorname{sen} t + 2y \cos t - a \operatorname{sen} 2t = 0$, la normal $x \cos t - y \operatorname{sen} t - a \cos 2t = 0$.

117. Para $t = (2k + 1)\pi$, donde k es un número entero cualquiera, la tangente $y = 2a$, las normales $x = (2k + 1)a\pi$. En todos los demás puntos la tangente $x - y \operatorname{tg}(t/2) + a(2\operatorname{tg}(t/2) - t) = 0$, la normal $x \operatorname{tg}(t/2) + y - at \operatorname{tg}(t/2) = 0$.

118. La tangente $x = a(\cos t - \lambda \operatorname{sen} t)$, $y = b(\operatorname{sen} t + \lambda \cos t)$ o bien $bx \cos t + ay \operatorname{sen} t - ab = 0$, la normal $x = (a + b\lambda)\cos t$, $y = (b + a\lambda)\operatorname{sen} t$ o bien

$$ax \operatorname{sen} t - by \cos t + (b^2 - a^2)\operatorname{sen} t \cos t = 0.$$

119. La tangente $x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) + \lambda\dfrac{a}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right)$, $y = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) + \lambda\dfrac{b}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)$, o bien $\dfrac{b}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)x - \dfrac{a}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)y - ab = 0$, la normal $x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) - \dfrac{\lambda b}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)$, $y = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) + \dfrac{\lambda a}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right)$, o bien

$$\frac{a}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)x + \frac{b}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)y - \frac{t^4 - 1}{4t^2}(a^2 + b^2) = 0.$$

120. La tangente $x + y - 3a = 0$, la normal $x - y = 0$.
121. La tangente $4x - 2y - a = 0$, la normal $2x + 4y - 3a = 0$.
122. La tangente

$$x(x^2 + y^2 - a^2)(X - x) + y(x^2 + y^2 + a^2)(Y - y) = 0,$$

la normal

$$y(x^2 + y^2 + a^2)(X - x) - x(x^2 + y^2 - a^2)(Y - y) = 0.$$

123. La tangente

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1,$$

la normal

$$\frac{(X - x)a^2}{x} - \frac{(Y - y)b^2}{y} = 0.$$

124. La tangente

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1,$$

la normal

$$\frac{(X - x)a^2}{x} + \frac{(Y - y)b^2}{y} = 0.$$

125. La tangente $yY = p(X + x)$, la normal

$$y(X - x) + p(Y - y) = 0.$$

126. La tangente $(\operatorname{sen}\varphi + \varphi\cos\varphi)x - (\cos\varphi - \varphi\operatorname{sen}\varphi)y - a\varphi^2 = 0$, la normal $(\cos\varphi - \varphi\operatorname{sen}\varphi)x + (\operatorname{sen}\varphi + \varphi\cos\varphi)y - a\varphi = 0$.
127. La tangente $y - a = 0$, la normal $x - a = 0$.
128. $A(1/2, 1/4)$.
129. No.
131. $y = 4x - 4$.
132. $A(2, -3)$.
133. $b = -1$, $c = -1$. 134. $M_1(2/3, 4/9)$, $M_2(2/3, 8/27)$.
136. $y = 2x + 3$, $y = 2x + \frac{49}{27}$.
137. $y + 1 = (x + 7)/3$.
139. $(x \pm y)\sqrt{2} = -a$, $(x \pm y)\sqrt{2} = a$.
143. $M_1(0, 0)$, $M_2(4, 4)$; $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(3/4)$.
144. $M_1(0, 3)$, $M_2(0, -3)$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/4$.
145. $M_1(1, 2)$, $M_2(1, -2)$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$.
146. $M_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\varphi_k = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$, donde k es un número entero cualquiera.

152. Del $\triangle M_1M_2A$ obtenemos (fig. 37) $\mu_1 = \varphi/2$ (véase el problema 151), $\mu_2 = (\varphi + \pi)/2$, $\widehat{M_1AM_2} = \mu_2 - \mu_1 = \pi/2$.

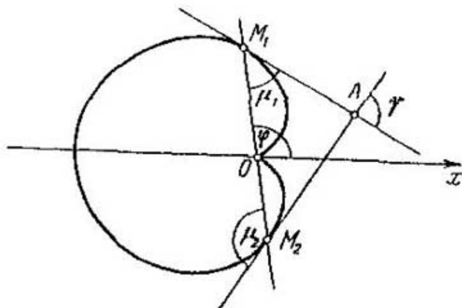


Fig. 37.

160. Suponiendo que $Y = 0$, $X = x_T$ en la ecuación de la tangente $Y - y = y'(X - x)$, obtenemos $x_T - x = -y/y'$. Por consiguiente, $|PT| = |y/y'|$ (fig. 38). Las demás fórmulas se obtienen de un modo análogo.

161. $|MT| = \sqrt{5}/2$, $|PT| = 1/2$, $|MN| = \sqrt{5}$, $|PN| = 2$.

162. $|MT| = |\operatorname{cth} x| \operatorname{ch} x$, $|PT| = |\operatorname{cth} x|$, $|MN| = \operatorname{ch}^2 x$, $|PN| = |\operatorname{sh} 2x|/2$.

163. $y^2 = \pm 2kx + c$, donde c es una constante arbitraria.

164. $y = ce^{\pm x/k}$, donde c es una constante arbitraria.

166. $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t) + c$, $y = a \operatorname{sen} t$, donde t es el ángulo formado por la tangente con la dirección positiva del eje de las abscisas. Es la familia de líneas congruentes llamadas *tractrices*. En la fig. 39 se muestra la tractriz correspondiente a $c = 0$.

167. $S = \pi a^2/2$.

168. Del triángulo rectangular MOT (fig. 40) tenemos $|OT| = |OM| \operatorname{tg} \mu$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} \mu = |r/r'|$ (véase el problema 150), obtenemos

$$|OT| = r^2/|r'|.$$

Las demás fórmulas se obtienen de un modo análogo.

169. $r = \pm \dfrac{k}{\varphi - \varphi_0}$, donde φ_0 es un ángulo arbitrario (en la fig. 41 el ángulo $\varphi_0 = 0$). Tales líneas se llaman *espirales hiperbólicas*.

170. Las espirales de Arquímedes.

171. $r = \pm k \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)$, o sea, las circunferencias (véase el problema 102).

Fig. 38.

Fig. 39.

Fig. 40.

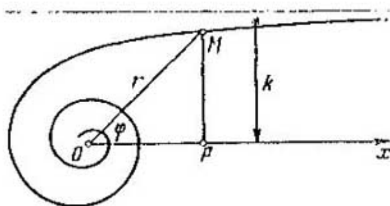


Fig. 41.

177. Tangencia de segundo orden.
178. Tangencia de primer orden. 180. El tercero.
181. $y = x^2 - 3x + 3$. 182. $x^2 + y^2 - y = 0$.
183. $(x + 2y)^2 - 20x + 14y + 19 = 0$. La tangencia de tercer orden.
184. Si $f(x)$ tiene para $x = 0$ derivadas de hasta un n-ésimo orden inclusive, entonces el problema tiene la solución

$$y = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

En caso contrario el problema no tiene una solución.
185. a) $\frac{(x-\pi R)^2}{12R^2} + \frac{(y+R)^2}{9R^2} = 1$, tangencia de quinto orden;
b) $\frac{(x-\pi R)^2}{-12R^2} + \frac{(y-5R)^2}{9R^2} = 1$, tangencia de quinto orden;
c) $(x-\pi R)^2 = -8R(y-2R)$, tangencia de tercer orden.
186. $x = 3$, $y = 0$. 187. $x = \pm 4$, $y = 0$.
188. $y = 0$. 189. $y = x - 4$, $x = 0$.
190. $y = x - 2$, $x = -2$. 191. $x = 0$.
192. $x = 3$, $y = -4$, $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.
193. $y = -\frac{1}{2}$, $y = 2x + \frac{1}{2}$.
194. $x = -\frac{1}{2}$, $2x - 4y - 3 = 0$.
195. $y = \pm 2$, $x = 1$. 196. $x = 0$.
197. $y = \pm x$. 198. $y = a$.
199. $x = 2a$.
200, 201. $O(0, 0)$, un punto múltiple.
202, 203. $O(0, 0)$, un punto aislado.
204. $O(0, 0)$, un punto autotangencial.
205. $O(0, 0)$, un punto de retroceso de primer género. La tangente $y = 0$.

206. $O\ (0, 0)$. Para $l > a$ es un punto múltiple con las tangentes $y = \pm \frac{ax}{\sqrt{l^2 - a}}$. Para $l < a$ es un punto aislado. Para $l = a$ es un punto de retroceso de primer género con la tangente $x = 0$ (véase la fig. 24).

207. $A\ (a, 0)$, punto múltiple. Las tangentes son $y = \pm (x - a)$.

208. $O\ (0, 0)$ punto múltiple. Las tangentes son $y = \pm x$.

209. $A\ (0, 0)$, punto de retroceso de primer género. La tangente es $y = 0$.

210—212. No existen (fig. 42—44).

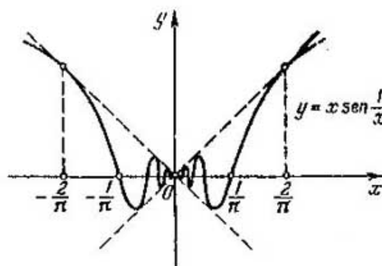


Fig. 42.

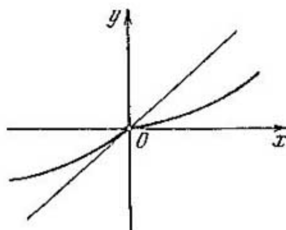


Fig. 43.

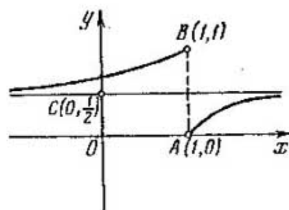


Fig. 44.

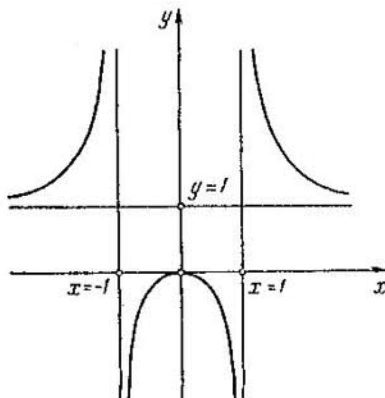


Fig. 45.

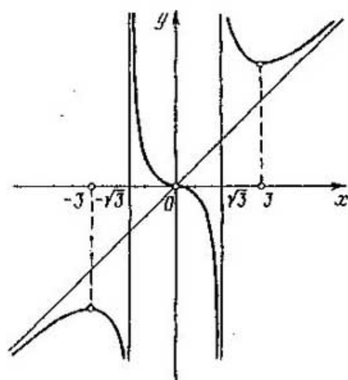


Fig. 46.

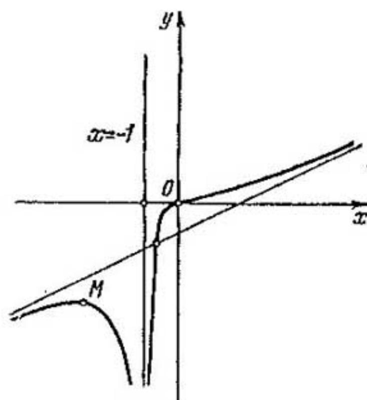


Fig. 47.

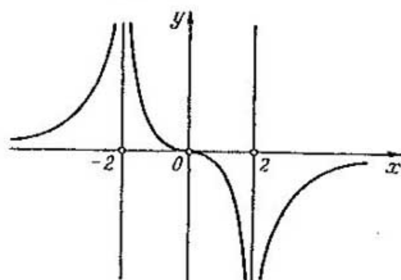


Fig. 48.

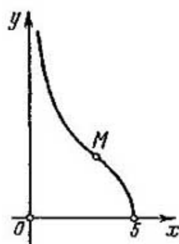


Fig. 49.

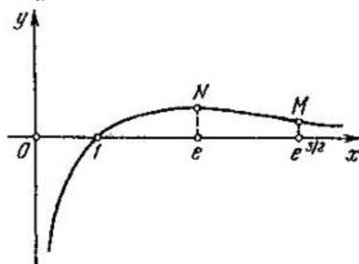


Fig. 50.

214. $r\ddot{r} - 2\dot{r}^3 - r^2 = 0$.

215. La función está definida para todos los valores de x, salvo cuando $x = \pm 1$. No hay puntos singulares. En el origen de coordenadas la línea toca el eje Ox. Las asíntotas son $x = \pm 1$, $y = 1$. La línea es simétrica con respecto al eje Oy (fig. 45).

216. La función no está definida solamente para $x = \pm\sqrt{3}$, $y_{máx} = y(-3) = -9/2$, $y_{mín} = y(3) = 9/2$. Aquí y a continuación se tienen en cuenta extremos locales. $O(0, 0)$ es el punto de inflexión con la tangente horizontal. Las asíntotas son $y = x$, $x = \pm\sqrt{3}$ (fig. 46).

217. La función no está definida solamente para $x = -1$. El origen de las coordenadas es el punto de inflexión con la tangente $y = 0$. En el punto $M(-3, -27/8)$ la tangente es también paralela al eje Ox. Las asíntotas son $x + 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ (fig. 47).

218. La función no está definida para $x = \pm 2$; $O(0, 0)$ es el punto de inflexión con la tangente $y = 0$. Las asíntotas $x = \pm 2$, $y = 0$ (fig. 48).

219. El campo de definición $[0, 5]$; $M(5/\sqrt[3]{4}, 5/\sqrt[3]{4})$ es el punto de inflexión con la tangente inclinada en 135° con respecto al eje Ox. La asíntota es $x = 0$ (fig. 49).

220. La función está definida para $x > 0$; $y_{máx} = y(e) = 1/e$; $M\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$ es el punto de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$ (fig. 50).

221. La función está definida y es positiva para todos los x; $y_{máx} = y(0) = 1$; $M_1(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$, $M_2(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$ son los puntos de inflexión. La asíntota es $y = 0$ (fig. 51).

222. La función está definida para todos los valores de x, salvo cuando $x = 0$; $M(-1/2, 1/e^2)$ es el punto de inflexión. Las asíntotas son $y = 1$, $x = 0$ (fig. 52).

223. La curva es simétrica con respecto a la bisectriz de los ángulos de coordenadas primero y tercero. La asíntota es $x + y + a = 0$; $O(0, 0)$ es el punto múltiple con las tangentes $x = 0$, $y = 0$ (véase la fig. 36).

224. La curva es cerrada, no hay puntos singulares. Los puntos de intersección con los ejes $O(0, 0)$, $M_1(1/2, 0)$. En los puntos $M_2(t = -1 + \sqrt{2})$, $M_3(t = -1 - \sqrt{2})$ las tangentes son paralelas al eje Ox. En los puntos $O(t = 0)$, $M_4(t = \pm\infty)$ las tangentes son paralelas al eje Oy. Una vez escrita la ecuación de la curva en forma implícita, es fácil demostrar que es una elipse (fig. 53).

225. La curva es simétrica con respecto al eje Ox y se encuentra en la franja $0 \leqslant x < 1$. La asíntota $x = 1$; $O(0, 0)$ es un punto de retroceso de primer género (fig. 54).

226. La curva es simétrica con respecto al eje Ox y se encuentra en la franja $0 \leqslant x < 1$. La asíntota es $x = 1$. La curva corta los ejes de las coordenadas en los puntos $O(0, 0)$, $M_1(1/2, 0)$. Por el punto M_1 la curva pasa dos veces (para $t = \pm 1$), los coeficientes angulares de las tangentes a ella son $k = \pm 2$. No hay puntos singulares. La

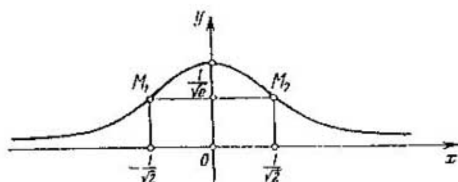


Fig. 51.

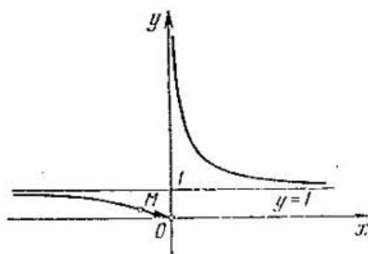


Fig. 52.

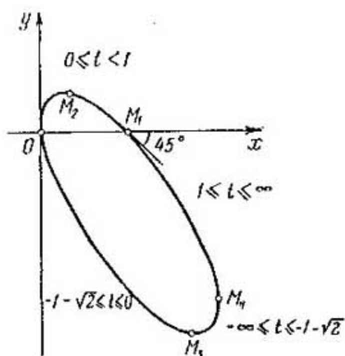


Fig. 53.

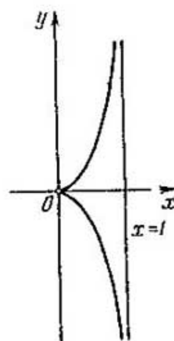


Fig. 54.

tangente a la curva es paralela al eje Oy en el origen de coordenadas y al eje Ox, en los puntos M_2 y M_3 correspondientes a los valores del parámetro $t = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$ (fig. 55).

227. Cuando $t = 0$, la tangente en el punto O (0, 0) coincide con el eje Oy. En los puntos M_1 (1, 4/3) y M_2 (1, —4/3), cuando $t = \pm 1$,

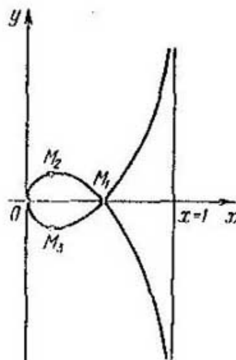


Fig. 55.

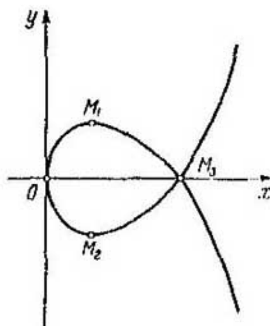


Fig. 56.

las tangentes son paralelas al eje Ox. Por el punto M_3 (3, 0) ($t = \pm\sqrt{3}$) la curva pasa dos veces. No hay asíntotas (fig. 56).

228. Las asíntotas son $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $y = x+1$. La curva corta los ejes de las coordenadas solamente en el origen. O (0, 0) es un punto de retroceso de primer género. La tangente es paralela al eje Ox en los puntos O, M_1, M_2 ($t = \pm\sqrt{3}$). La tangente es paralela al eje Oy en el punto M_3 ($t = 2$) (fig. 57).

229. La curva es simétrica con respecto al eje Ox. Las asíntotas son $x = -1$, $y = \pm\left(x - \frac{1}{2}\right)$. La primera asíntota no corta la curva, las otras dos la cortan en los puntos M_1 ($t = -1/2$) y M_2 ($t = 1/2$); O (0, 0) es un punto de retroceso de primer género. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos M_3, M_4 ($t = \pm\sqrt{3}$) (fig. 58).

230. La curva es simétrica con respecto al eje Ox. No hay asíntotas ni puntos singulares. Los puntos $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ y $M_2\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ obtenidos con $t = \pm\sqrt{3}/3$ son puntos de inflexión. En el origen de las coordenadas la curva toca el eje Oy (fig. 59).

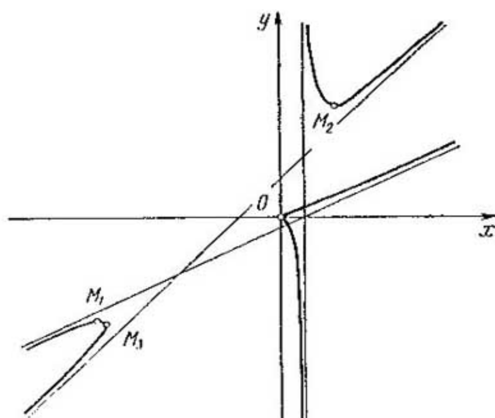


Fig. 57.

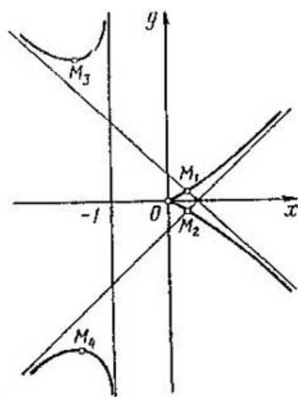


Fig. 58.

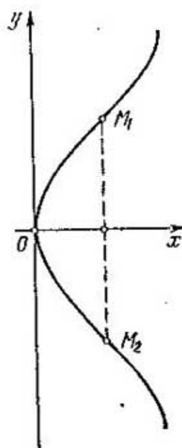


Fig. 59.

231. No hay asíntotas. O (0, 0) es un punto de retroceso de segundo género con la tangente $x = 0$. La curva corta el eje Ox en los puntos O y M_1 (1, 0). M_2 ($t = -\sqrt[3]{0,8}$) es punto de inflexión. En el punto M_3 ($t = \sqrt[3]{0,4}$) la tangente es paralela al eje Ox (fig. 60).

232. La asíntota $y = 1$; O (0, 0) es el punto de inflexión, la tangente al mismo coincide con el eje Oy. La tangente es paralela al eje Oy en el punto M ($t = 5/4$) (fig. 61).

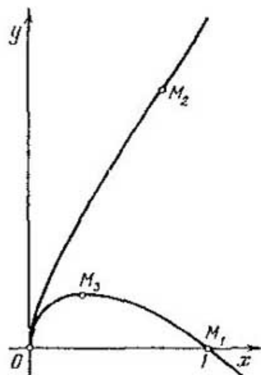


Fig. 60.

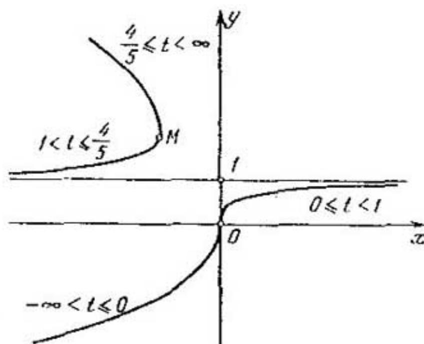


Fig. 61.

233. Las asíntotas son $x = 0$, $x + y \pm 2 = 0$; O (0, 0) es el punto de inflexión con tangente $x - y = 0$ (fig. 62).

234. El origen de las coordenadas es punto de retroceso de segundo género. Los puntos de intersección con los ejes de las coordenadas son O (0, 0) y M (1, 0) (fig. 63).

235. La curva es simétrica con respecto a la recta $y = x$. La asíntota es $x + y - 1 = 0$. El origen de las coordenadas es punto de retroceso de primer género (para $t = 0$) con la tangente Ox. Además, la curva entra en el origen de las coordenadas tocando el eje Oy para $t = \pm\infty$ (fig. 64).

236. Las asíntotas son $2x + 9 = 0$, $2x - 9 = 0$, $x - y - 6 = 0$; M_1 (4, −4) es punto de retroceso de primer género con tangente $x + y = 0$. El eje Ox toca la curva en el punto M_2 (16/3,0) y el eje Oy lo hace en el punto M_3 (0, −16/3) (fig. 65).

237. La curva es simétrica con respecto al eje Oy. Las asíntotas son $y = \pm x - 1$; O (0, 0) es punto singular triple con tangentes $x = 0$ e $y = 0$. Los puntos de inflexión son $M_{1,2}$ $(\pm 2\sqrt[4]{27}, 2\sqrt{3})$ (fig. 66).

238. La curva es simétrica con respecto al eje Oy; $M_{1,2}$ (±2, 0) son puntos de retroceso de primer género con tangentes $\pm x + y -$

$-2=0$. En los puntos M_3 $(0, 2/3)$ y M_4 $(0, 2)$ las tangentes son paralelas al eje Ox; $M_{5,6}\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{5},\ \frac{2}{3}\right)$ son puntos de inflexión (fig. 67).

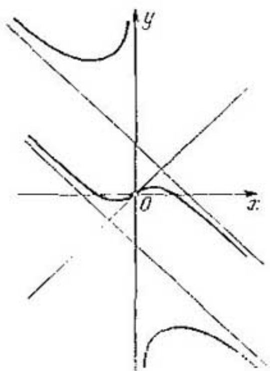


Fig. 62.

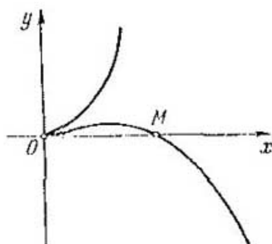


Fig. 63.

239. Ox es eje de simetría. No hay asíntotas ni puntos singulares. La línea corta al eje Ox en el punto M_1 $(-1, 0)$ y al eje Oy en los puntos $M_{2,3}$ $(0, \pm 1)$. Las tangentes a la línea son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{2,3}$ y al eje Oy en el punto M_1. Los puntos $M_{2,3}$ son de inflexión (fig. 68).

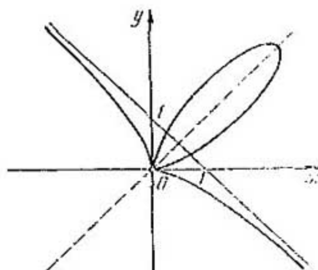


Fig. 64.

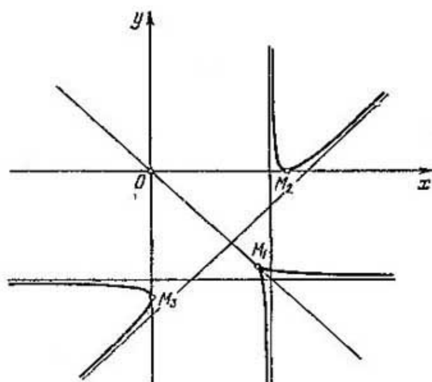


Fig. 65.

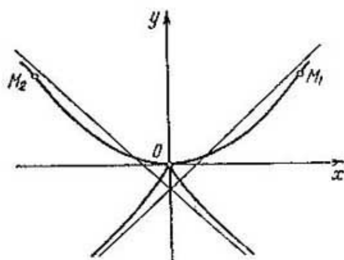


Fig. 66.

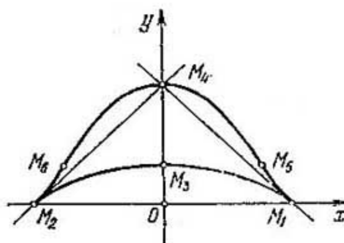


Fig. 67.

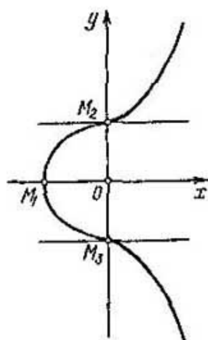


Fig. 68.

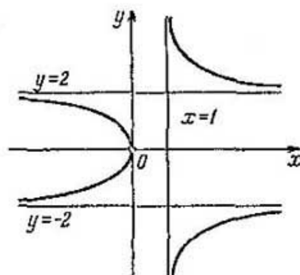


Fig. 69.

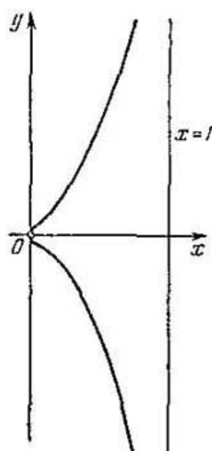


Fig. 70.

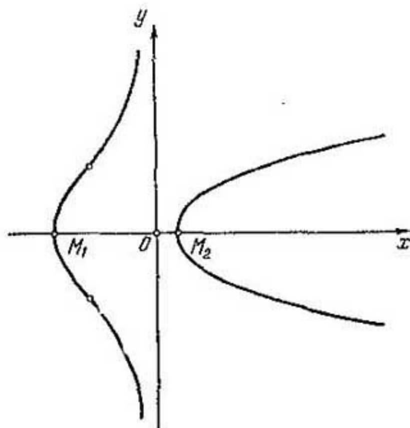


Fig. 71.

240. La línea es simétrica con respecto al eje Ox. Las asíntotas son $x = 1$, $y = \pm 2$. La línea toca el eje Oy en el origen de las coordenadas. En la franja del plano definido por las desigualdades $0 < x \leqslant 1$ no existen puntos que satisfagan a la ecuación dada (fig. 69).

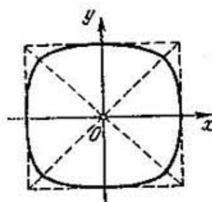


Fig. 72.

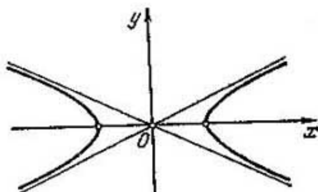


Fig. 73.

241. La línea es simétrica con respecto al eje Ox. La asíntota es $x = 1$. La tangente vertical es $x = 0$. La línea existe solamente para los valores de x en el intervalo de $0 \leqslant x < 1$, lo que se ve de la representación de su ecuación en la forma $y^2 = \frac{x(x^2+1)}{1-x}$ (fig. 70).

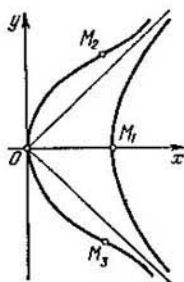


Fig. 74.

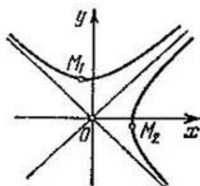


Fig. 75.

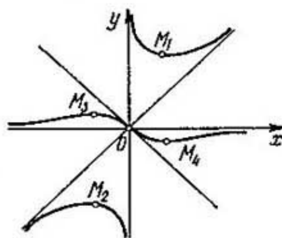


Fig. 76.

242. La línea es simétrica con respecto al eje Ox. La asíntota es $x = 0$. En los puntos M_1 (—5/2, 0) y M_2 (1/2, 0) las tangentes son paralelas al eje de las ordenadas. Hay dos puntos de inflexión (fig. 71).

243. La línea se encuentra por completo dentro del cuadrado con centro en el origen de coordenadas y con lados iguales a $2a$ y paralelos a los ejes de coordenadas. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas y a las bisectrices de los ángulos de las coordenadas (fig. 72).

244. La línea se parece a una hipérbola. Las asíntotas son $2y = \pm x$. Para $x^2 < 6$ no existen puntos que satisfagan a la ecuación dada, a excepción del punto O (0, 0) que es aislado (fig. 73).

245. Las asíntotas son $y = \pm x$. Las tangentes son paralelas al eje Oy en los puntos O (0, 0) y M_1 ($\sqrt[3]{2}$, 0). Hay dos puntos de inflexión, M_2 y M_3 (fig. 74).

246. Las asíntotas son $y = \pm x$. Las tangentes son paralelas a los ejes de coordenadas en los puntos $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{32}}, \frac{3}{\sqrt[3]{32}}\right)$ y M_2 $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{32}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right)$ (fig. 75).

247. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$, $y = x$; O (0, 0) es punto de inflexión con tangente $y = -x$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}$ $(\sigma, (\sqrt{2}+1)\sigma)$, $M_{3,4}$ $(-\sigma, (\sqrt{2}-1)\sigma)$; $\sigma = \pm 1$ (fig. 76).

248. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$. La tangente es paralela al eje Ox en el punto M (0, 1) (fig. 77).

249. La recta $x = 1$ y el punto aislado O (0, 0).

250. Las asíntotas son $x = \pm 1$, $y = \pm 1$; O (0, 0) es un punto aislado (fig. 78).

251. Las asíntotas son $y = \pm x$; O (0, 0) es un punto aislado. La línea corta el eje Oy en los puntos $M_{1,2}$ $(0, \pm\sqrt{2})$, en los cuales las tangentes son paralelas al eje Ox (fig. 79).

252. La línea es simétrica con respecto al eje Ox. Las asíntotas son $y = x + 1$, $y = -x - 1$, $x = 1$; las asíntotas $y = \pm(x + 1)$ cortan la línea en el punto M_1 (−1, 0); O (0, 0) es un punto aislado. Además del punto O, no hay otros en la franja $-1 < x \leqslant 1$. La tangente a la línea es paralela al eje Oy en el punto M_1 y al eje Ox en los puntos M_2 y M_3 con la abscisa $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (fig. 80).

253. Las asíntotas $y - x \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$, $y + x \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$. El origen de coordenadas es un punto aislado. La tangente es paralela al eje Ox en los puntos $M_{1,2}$ $(0, \pm a)$, y al eje Oy, en los puntos $M_{3,4}$ $(\pm a, 0)$ (fig. 81).

254. La línea es simétrica con respecto al eje Ox. El punto M_0 (2, 0) es aislado. En los puntos $M_{1,2}$ $(-2, \pm\sqrt{2})$ la tangente es paralela al eje Ox. Hay dos puntos de inflexión $M_{3,4}$ y una asíntota, $x = 0$ (fig. 82).

255. Las asíntotas son $3x + 4 = 0$, $3x \pm 3\sqrt{3}y - 8 = 0$; O (0, 0) es un punto aislado. En M (4, 0) la línea se interseca con el eje Ox. La tangente en este punto es $x = 4$ (fig. 83).

256. La línea se encuentra por completo dentro del cuadrado con el centro en el origen de las coordenadas y lados iguales a $\sqrt{2+\sqrt{8}}$ y paralelos a los ejes de las coordenadas. La línea es simétrica con respecto a estos ejes y a las bisectrices de los ángulos de las coorde-

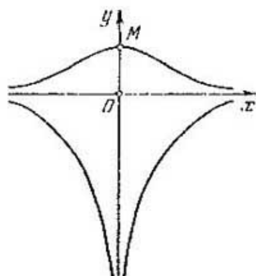


Fig. 77.

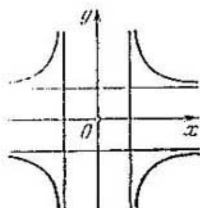


Fig. 78.

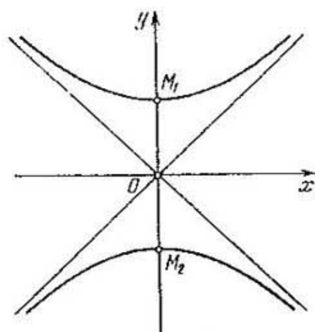


Fig. 79.

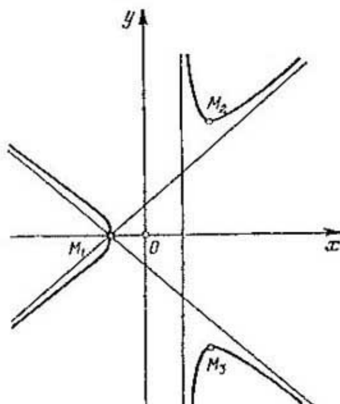


Fig. 80.

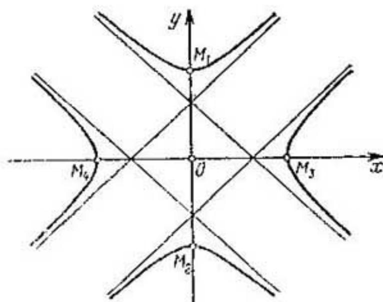


Fig. 81.

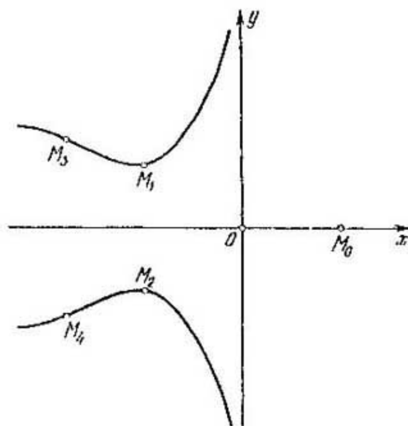


Fig. 82.

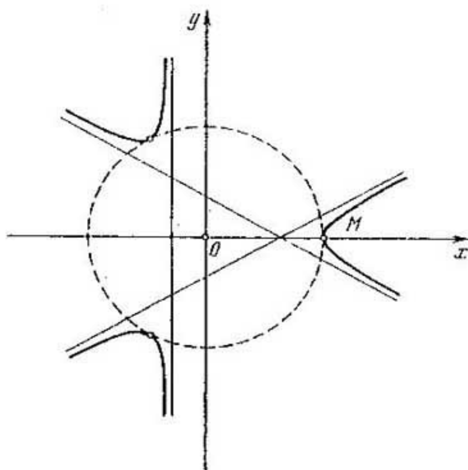


Fig. 83.

nadas. El origen de las coordenadas es un punto aislado. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}(0, \pm 1)$, M_{3-6} $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}\right)$. Las tangentes son paralelas al eje Oy en los puntos $M_{7,8}(\pm 1, 0)$, $M_{9-12}\left(\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (fig. 84).

257. La línea es simétrica con respecto al eje Ox y por completo se encuentra en la franja $-1 \leqslant x < 1$. La asíntota es $x = 1$. El origen de las coordenadas es un punto múltiple con coeficientes angulares de las tangentes $k = \pm 1$. La tangente es paralela al eje Oy en el punto $M_1(-1, 0)$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{2,3}$ con abscisa $x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ (fig. 85).

258. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas. Los puntos de intersección con ellos son $O(0, 0)$, $M_{1,2}(0, \pm 1)$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}$ y al eje Oy en los puntos $M_{3-6}\left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $O(0, 0)$ es un punto múltiple con tangentes $y = \pm x$ (fig. 86).

259. La línea es simétrica con respecto al eje Ox; $M(1, 0)$ es punto múltiple con tangentes $y = \pm(x-1)$. La asíntota es $x = 0$ (fig. 87).

260. La línea es simétrica con respecto a las bisectrices de los ángulos de las coordenadas. $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. No hay otros puntos de interesección con los ejes de las coordenadas. Las tangentes a la línea son paralelas al eje Ox en dos puntos $M_1(\sqrt[8]{3/16}, \sqrt[8]{27/16})$, $M_2(-\sqrt[8]{3/16}, -\sqrt[8]{27/16})$ y al eje Oy en los puntos $M_3(\sqrt[8]{27/16}, \sqrt[8]{3/16})$ $M_4(-\sqrt[8]{27/16}, -\sqrt[8]{3/16})$. No hay asíntotas (fig. 88).

261. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas y se encuentra dentro del rectángulo acotado por las rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1/2$; $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $y = \pm x$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{3-6}(\pm\sqrt{2}/2, \pm 1/2)$ y al eje Oy en los puntos $M_{1,2}(\pm 1, 0)$ (fig. 89).

262. La línea es simétrica con respecto al eje Ox. Las asíntotas son $y = \pm 1$, $x = -1$, $x = -2$; $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $y\sqrt{2} = \pm x$ (fig. 90).

263. Las tangentes son paralelas al eje Ox en dos puntos $M_{2,3}(1/3, +2/3\sqrt{3})$; el punto $M_1(1, 0)$ es múltiple con tangentes $y = \pm(x-1)$. La tangente es paralela al eje Oy en el punto $O(0, 0)$ (fig. 91).

264. La línea es simétrica con respecto a las bisectrices de los ángulos de las coordenadas; $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos

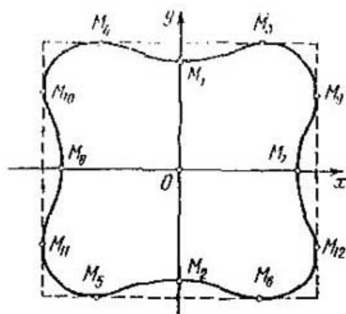


Fig. 84.

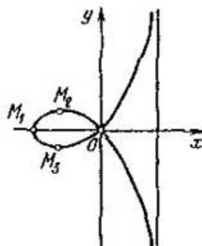


Fig. 85.

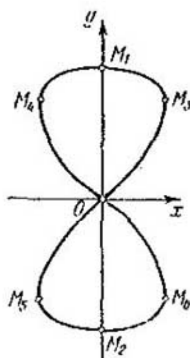


Fig. 86.

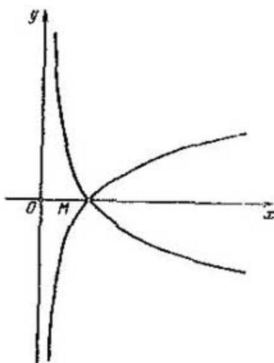


Fig. 87.

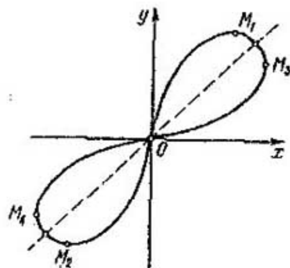


Fig. 88.

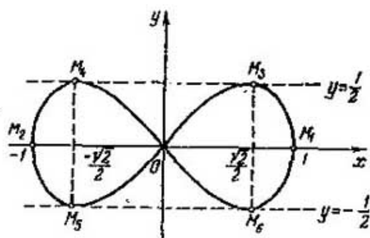


Fig. 89.

$M_{1,2}\,(\sigma\sqrt[4]{3},\ \sigma\sqrt[4]{27})$ y al eje Oy en los puntos $M_{3,4}\,(\sigma\sqrt[4]{27},\ \sigma\sqrt[4]{3})$, donde $4\sigma = \pm 1$ (fig. 92).

265. La asíntota $y = -x + \frac{1}{3}$ se interseca con la línea en el punto $M_1\,(1/9,\ 2/9)$; $O\,(0,\ 0)$ es un punto de retroceso de primer género con tangente $x = 0$. En el punto $M_2\,(1,\ 0)$ la tangente es paralela al eje Oy y en el punto $M_3\,(2/3,\ \sqrt[3]{4}/3$, al eje Ox (fig. 93).

266. No hay asíntotas. $O\,(0,\ 0)$ es punto de retroceso de primer género con tangente $y = x$. La línea corta el eje Ox en el punto $M_1\,(27,\ 0)$. La tangente es paralela al eje Ox en el punto $M_2\,(12{,}4)$ (fig. 94).

267. La línea es simétrica con respecto al eje Ox; $O\,(0,\ 0)$ es punto de retroceso de primer género con tangente $y = 0$. Las asíntotas son $x = a$, $x \pm y = -a/2$. En la franja del plano $0 < x \leqslant a$ no hay puntos que satisfagan la ecuación de la línea (fig. 95).

268. $O\,(0,\ 0)$ es punto de retroceso de segundo género con tangente $y=0$; $M_1\left(\frac{64}{225},\ \frac{28\,672}{759\,375}\right)$ es punto de inflexión. En el punto $M_2\left(\frac{16}{25},\ \frac{256}{3125}\right)$ la tangente es paralela al eje Ox. En el punto $M_3\,(1,\ 0)$ la línea corta el eje Ox (fig. 96).

269. La línea es simétrica con respecto al eje Oy; $O\,(0,\ 0)$ es un punto singular por el cual pasan tres arcos. Las tangentes en él son $y = 0$, $x \pm y = 0$. No hay puntos de inflexión ni asíntotas. Los puntos en los cuales las tangentes son paralelas a los ejes de coordenadas son $M_{1,2}\,(\pm\sqrt{2}/4,\ 1/4)$, $M_{3,4}\,(\pm\sqrt{6}/9,\ 2/9)$ (fig. 97).

270. La línea es simétrica con respecto al eje Oy; $O\,(0,\ 0)$ es punto autotangencial con tangente $y = 0$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}\,(\pm 6,\ 12)$ y al eje Oy en los puntos $M_{3,4}\,(\pm 6\sqrt{2},\ 8)$. Hay dos puntos de inflexión $M_{5,6}$ (fig. 98).

271. La línea es simétrica con respecto al eje Ox; $O\,(0,\ 0)$ es punto singular triple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}\,(\sqrt{12},\ \pm\sqrt{6\sqrt{12}})$ y al eje Oy en los puntos $M_{3,4}\,(4,\ \pm 4)$ (fig. 99).

272. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas; $O\,(0,\ 0)$ es punto autotangencial con tangente $y = 0$. La línea corta el eje Ox en los puntos $M_{1,2}\,(\pm 1,\ 0)$ en los cuales las tangentes son paralelas al eje Oy. En los puntos $M_{3-6}\,(\pm\sqrt{6/3},\ \pm 2\sqrt{3/9})$ las tangentes son paralelas al eje Ox; M_{7-10} son puntos de inflexión (fig. 100).

273. Las asíntotas son $y = \pm x$; $O\,(0,\ 0)$ es punto múltiple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. Hay cinco puntos de inflexión (fig. 101).

274. La línea se encuentra por completo dentro del cuadrado con el centro en el origen de las coordenadas y lados iguales a 4 y paralelos a los ejes de coordenadas. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas y a las bisectrices de los ángulos de éstas. $O\,(0,\ 0)$ es un punto singular cuádruple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. Las tan-

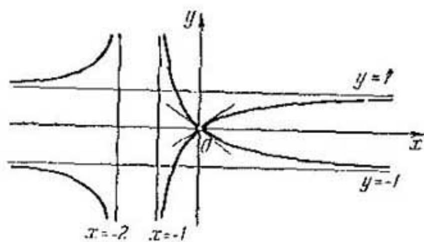


Fig. 90.

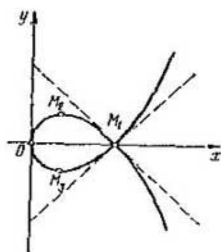


Fig. 91.

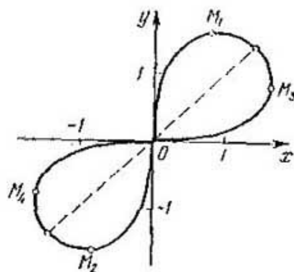


Fig. 92.

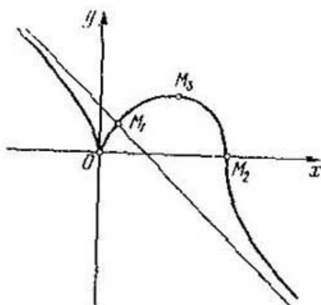


Fig. 93.

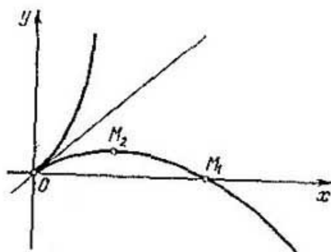


Fig. 94.

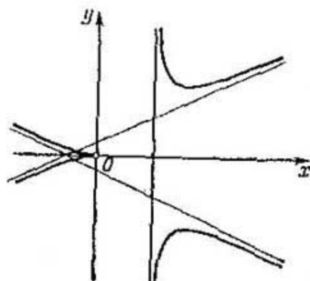


Fig. 95.

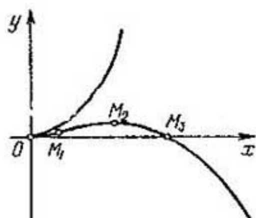


Fig. 96.

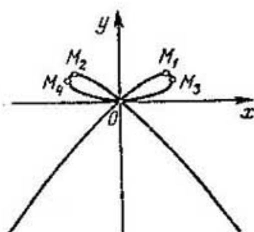


Fig. 97.

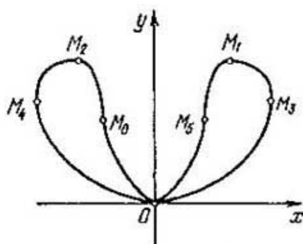


Fig. 98.

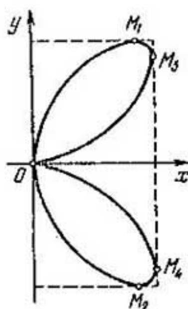


Fig. 99.

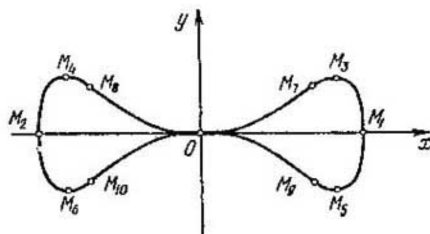


Fig. 100.

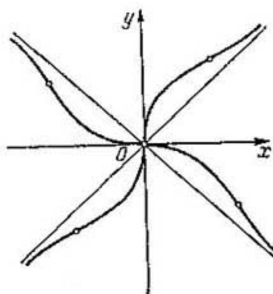


Fig. 101.

gentes son paralelas al eje Ox en los puntos M_{1-4} $(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$ y al eje Oy en los puntos M_{5-8} $(\pm 2, \pm\sqrt{2})$ (fig. 102).

275. Puesto que la función $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ es periódica con período 2π, es suficiente examinar el valor de φ en el intervalo $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Como el punto $(2\pi - \varphi, -r)$ es idéntico al punto $(\pi - \varphi, r)$ y los puntos

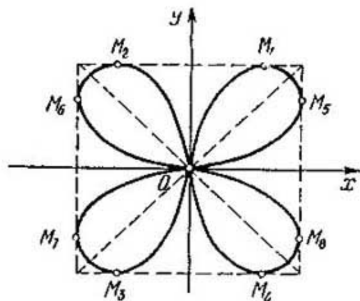


Fig. 102.

(φ, r) y $(\pi - \varphi, r)$ son simétricos con respecto a la recta $\varphi = \pi/2$, esta recta es el eje de simetría de la curva. Al variar el ángulo polar dentro de los límites de $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $r = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ será positivo, por eso para los valores indicados de φ la curva se encontrará por encima del eje polar. En virtud de la simetría con respecto a la recta $\varphi = \pi/2$ la curva estará por encima del eje polar. La curva tiene el punto múltiple $(\pi/2, 1)$. Hay una asíntota paralela al eje polar y alejada de éste en dos unidades. Por la fórmula $\operatorname{tg}\mu = r/r'$ (véase el problema 150) obtenemos

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{sen}\varphi. \qquad (*)$$

Por consiguiente, la curva toca el radio vector del punto de tangencia solamente si $\varphi = 0$. En el punto M_0 múltiple las tangentes cortan al eje de simetría en un ángulo de 45°. Como la tangente a la curva es paralela al eje polar si $\mu + \varphi = k\pi$ entonces en estos puntos $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{tg}\varphi$. Comparando esto con la igualdad (*), obtenemos $\varphi = k\pi$; por lo tanto, la tangente buscada es el eje polar. Como la tangente es perpendicular al eje polar, si $\mu + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{ctg}\varphi$ y, en virtd de (*), $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{sen}\varphi$, de donde $\cos\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$, y la $\operatorname{tg}(\varphi/2) \approx 1/2$. Introduciendo las coordenadas cartesianas por las fórmulas $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$, obtenemos dos puntos M_1 y M_2 en los cuales las tangentes son perpendiculares al eje polar: $x_1 \approx 0{,}3$, $y_1 \approx 0{,}4$; $x_2 \approx -0{,}3$, $y_2 \approx 0{,}4$ (fig. 103).

276. Fig. 104. En el polo la espiral tiene un punto de inflexión. A medida que se aleja del polo la distancia entre las espiras decrece indefinidamente.

277. Si r, φ son las coordenadas polares generalizadas (es decir r puede tomar un valor de cualquier signo), entonces la ecuación $r^2\varphi =$

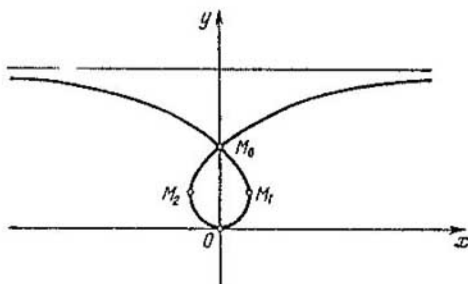


Fig. 103.

$= a^2$ define dos curvas simétricas con respecto al polo. Cada una de las curvas se acerca indefinidamente al polo y se aproxima asintóticamente al eje polar (fig. 105).

278. Fig. 106. El polo es un punto de retroceso de primer género. El eje polar en este punto es tangente.

279. Sea $a > 0$. Cuando $\varphi \to 0$, la línea se acerca asintóticamente a la recta paralela al eje polar y se halla a una distancia l del mismo. Cuando φ crece indefinidamente, la línea da un conjunto innumerable de vueltas alrededor del polo, aproximándose asintóticamente a la circunferencia de radio $r = a$ (fig. 107). Para $a = 0$ se obtiene una espiral hiperbólica (véase el problema 169, fig. 41).

280. La curva es simétrica con respecto a los ejes del sistema de coordenadas cartesianas cuyo eje Ox coincide con el eje polar. La curva corta el eje Ox en los puntos $M_{1,2}$ $(\pm a, 0)$, O $(0, 0)$, además, el punto O es autotangencial con tangente $y = 0$. La curva tiene dos puntos múltiples: M_3 $(0, a/\sqrt{2})$ y M_4 $(0, -a/\sqrt{2})$ (fig. 108).

281. Fig. 109.

282. La familia está compuesta por las elipses que tocan el eje Oy en el origen de coordenadas y por las rectas $y = 1/2$ e $y = -1/2$. Forma parte de la familia también el eje Ox (fig. 110).

283. Cuando $C = 0$, es un par de rectas $x = 0$, $x - 2y = 0$. Cuando $C \neq 0$, son hipérbolas semejantes cuyas asíntotas son paralelas a las rectas indicadas. Los centros de las hipérbolas O^* (C, C) llenan la recta $x - y = 0$. Una de las ramas de las hipérbolas toca el eje Ox en el origen de las coordenadas (fig. 111).

284. a) Familia de elipses confocales; b) familia de hipérbolas confocales (fig. 112).

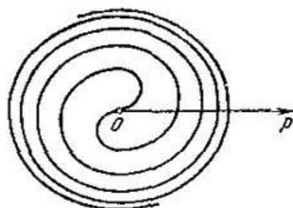


Fig. 104.

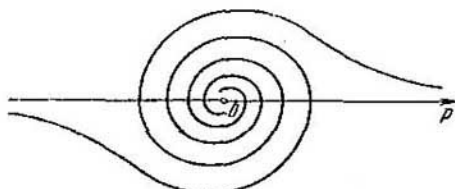


Fig. 105.

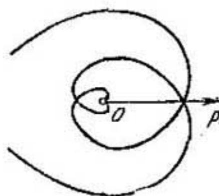


Fig. 106.

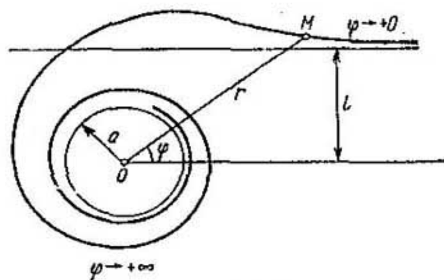


Fig. 107.

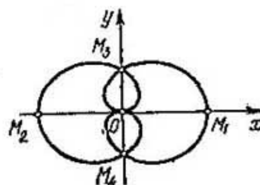


Fig. 108.

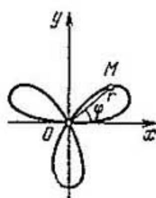


Fig. 109.

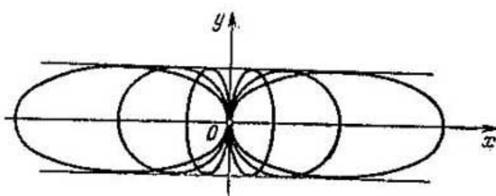


Fig. 110.

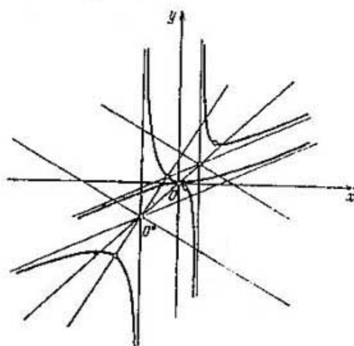


Fig. 111.

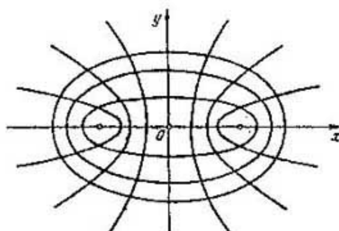


Fig. 112.

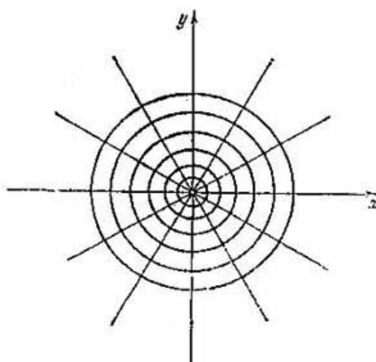


Fig. 113.

287. Circunferencias concéntricas cuyos centros coinciden con el del haz (fig. 113).

288. $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ (fig. 114).

289. $x^2 + \frac{y^2}{2} = C$ (fig. 115).

290. La familia de circunferencias intersecantes cuya línea de centros está orientada por la cuerda común de la familia dada. Colocando el origen de las coordenadas en el punto medio de la cuerda común y orientando el eje Ox por la cuerda en cuestión, obtenemos la ecuación $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - a^2$ (fig. 116).

291. $y = \pm a$ (fig. 117). 292. $x = 0$, $y = 0$ (fig. 118).

293. $x^2 + y^2 = p^2$ (fig. 119). 294. $y = 0$ (fig. 120).

295. El discriminante $y = 0$ consta de los puntos singulares de las líneas de la familia (fig. 121).

296. El discriminante $y = 0$ consta de los puntos singulares de las líneas de la familia (fig. 122).

297. El discriminante se descompone en un par de rectas $x = y$ y $x - y - \frac{2}{9} = 0$. La primera consta de los puntos singulares de las curvas y la segunda es la envolvente (fig. 123).

298. La circunferencia $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ (fig. 124).

299. La parábola $y^2 + 4a(x - a) = 0$ (fig. 125).

300. Las hipérbolas $xy = \pm S/2$ (fig. 126).

301. $(A^2 + B^2) R^2 = C^2$.

302. La astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 127).

303. a) La parábola $y^2 = 4ax$ (fig. 128).

INDICACIÓN. Tomemos la recta fijada por el eje Oy y orientemos el eje Ox a través del punto F. Sea $F(a, 0)$. Una vez escrita la ecuación del haz de rectas que pasan por F en la forma $y = C(x - a)$, obtenemos que las rectas de la familia indicada en el problema pasan por los puntos del eje Oy con las coordenadas $(0, -Ca)$ teniendo un coeficiente angular $-1/C$. b) Si $F(a, 0)$ y la circunferencia tiene la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, entonces, para $r > a$ obtenemos la elipse $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - a^2} = 1$, para $r < a$ obtenemos la hipérbola $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{a^2 - r^2} = 1$ y para $r = a$ no hay envolvente (fig. 129).

304. Cicloide (fig. 130).

305. $x^2 + y^2 = (R - r)^2$, $x^2 + y^2 = (R + r)^2$ (figs. 131—133).

306. La tangente en el vértice de la parábola dada (fig. 134).

307. La envolvente se compone de la circunferencia $\left(x - \frac{3p}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3p}{4}\right)^2$ y de la directriz de la parábola $x = -p/2$ (fig. 135).

308. Escribamos las ecuaciones de la elipse en forma paramétrica:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\,\text{sen}\,\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

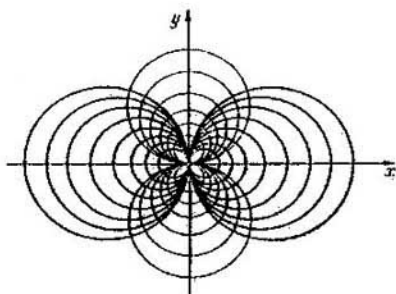


Fig. 114.

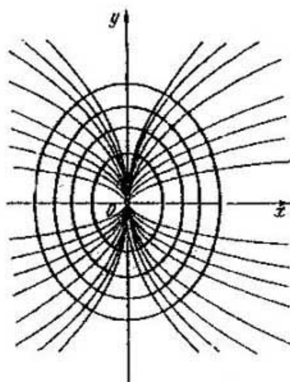


Fig. 115.

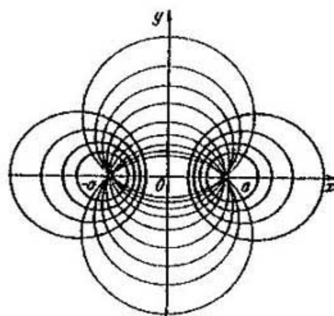


Fig. 116.

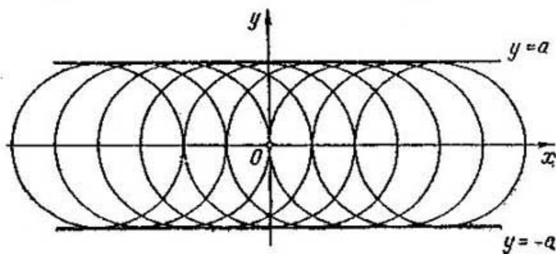


Fig. 117.

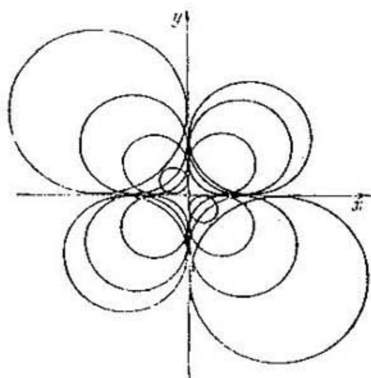


Fig. 118.

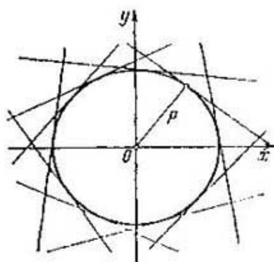


Fig. 119.

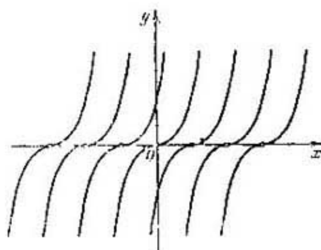


Fig. 120.

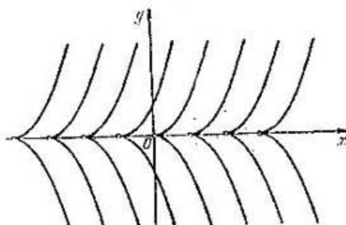


Fig. 121.

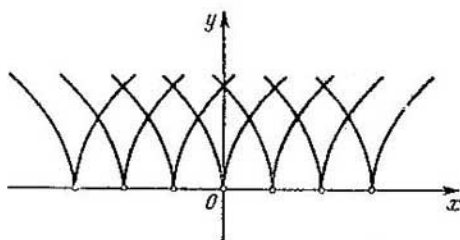


Fig. 122.

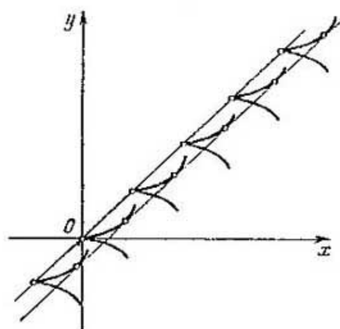


Fig. 123.

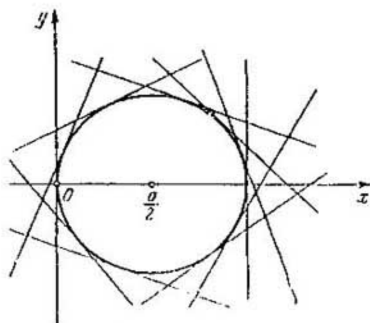


Fig. 124.

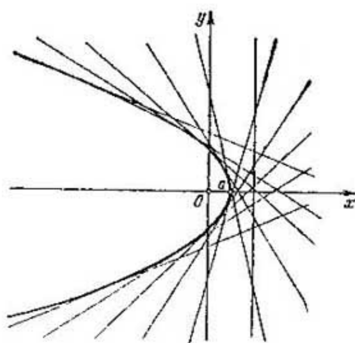


Fig. 125.

Examinemos el caso en que las cuerdas son paralelas al eje Oy. Las coordenadas del centro de la circunferencia de la familia son $x_0 = a \cos \varphi$, $y_0 = 0$, el radio $R = b \operatorname{sen} \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. La ecuación

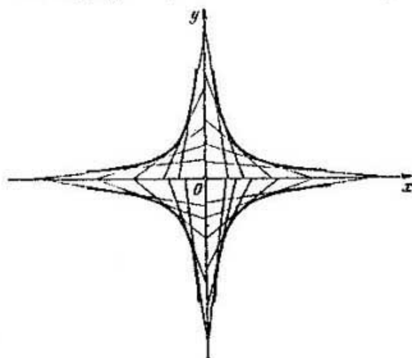


Fig. 126.

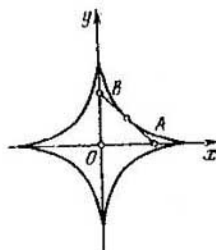


Fig. 127.

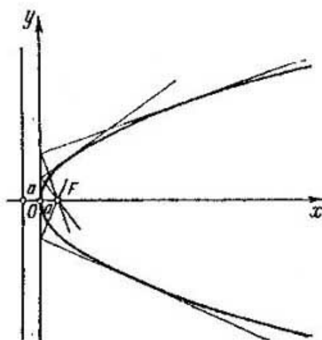


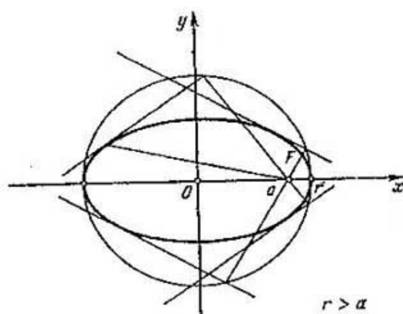
Fig. 128.

de la familia es

$$(x - a \cos \varphi)^2 + y^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

El discriminante se define por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (x - a \cos \varphi)^2 + y^2 &= b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi, \\ a (x - a \cos \varphi) &= b^2 \cos \varphi. \end{aligned}\right\}$$



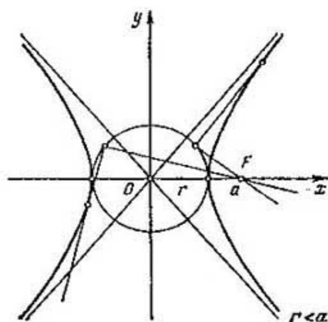


Fig. 129.

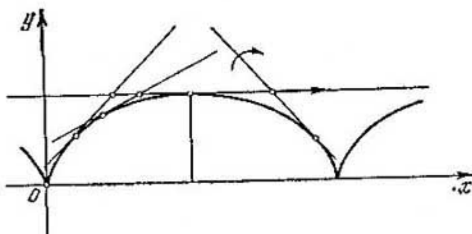


Fig. 130.

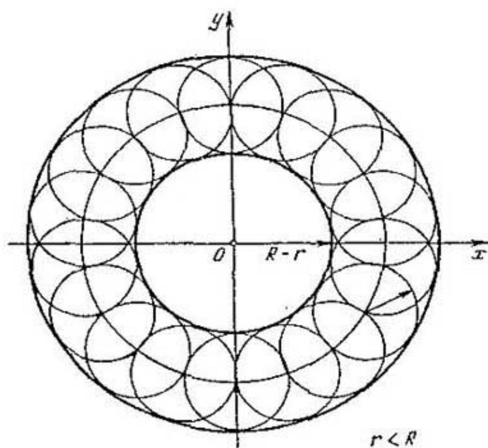


Fig. 131.

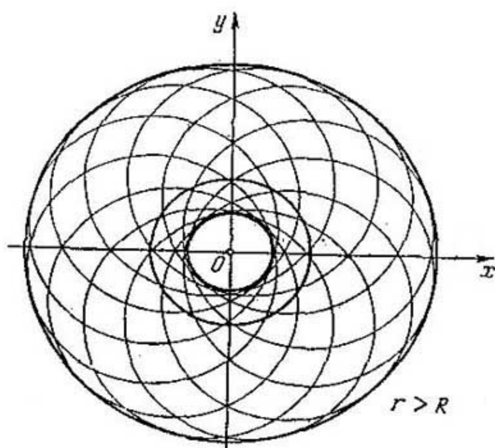


Fig. 132.

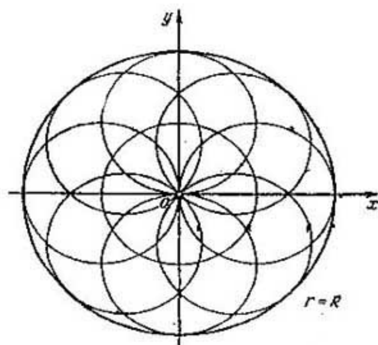


Fig. 133.

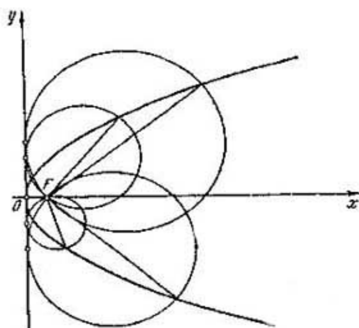


Fig. 134.

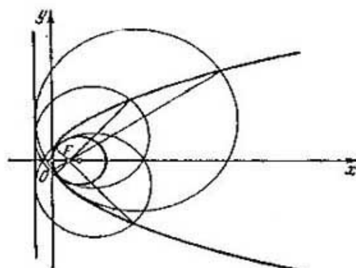


Fig. 135.

Como de la primera ecuación se deduce $|x - a\cos\varphi| \leqslant b \operatorname{sen}\varphi$, entonces de la segunda ecuación hallamos $b^2 |\cos\varphi| \leqslant ab \operatorname{sen}\varphi$ o bien $|\operatorname{tg}\varphi| \geqslant b/a$, es decir, el discriminante está definido sólo para aquellas circunferencias para las cuales $|\operatorname{tg}\varphi| \geqslant b/a$. Eliminemos el parámetro φ:

$$\cos\varphi = \frac{ax}{a^2+b^2}, \quad \operatorname{sen}^2\varphi = 1 - \frac{a^2x^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

La ecuación de la familia tormará la forma

$$\left(x - \frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2 + y^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2x^2}{(a^2+b^2)^2}\right),$$

de donde $b^4x^2 + y^2(a^2+b^2)^2 - b^2(a^2+b^2)^2 + a^2b^2x^2 = 0$, o bien

$$\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Es fácil comprobar que para los valores indicados del parámetro φ, el discriminante será la envolvente (fig. 136).

Si las cuerdas son paralelas al eje Ox (fig. 137), entonces por razonamientos análogos hallamos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+b^2} = 1, \quad |\operatorname{tg}\varphi| \leqslant \frac{d}{a}.$$

309. INDICACION. El problema se resulve igual que el precedente. Las ecuaciones paramétricas de la hipérbola se deben tomar de forma $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$. Si las cuerdas son paralelas al eje Oy, entonces la envolvente existe solamente para $b < a$. Su ecuación es $\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ella envuelve sólo aquellas circunferencias para las cuales $|\operatorname{th} t| \leqslant b/a$ (fig. 138). Si las cuerdas son paralelas al eje Ox, entonces la envolvente existe para cualesquiera valores de a y b.

Para $b \neq a$ ella se define por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-b^2} = 1$, para $b > a$ ella envuelve todas las circunferencias (fig. 139), mientras que para $b < a$ solamente aquéllas para las cuales $|\operatorname{th} t| \leqslant b/a$ (fig. 140).

Para $b = a$ no hay envolvente (fig. 141).

310. La parábola $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$. Ella es envolvente de las circunferencias de una familia para las cuales $C \geqslant p/2$ (fig. 142).

311. $y^2 = 2(p+q)x$ (fig. 143).

312. Los puntos de la envolvente deben satisfacer al sistema de ecuaciones $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, $\frac{D(F, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0$.

313. Cuatro rectas $x \pm y = \pm 1$ (fig. 144).

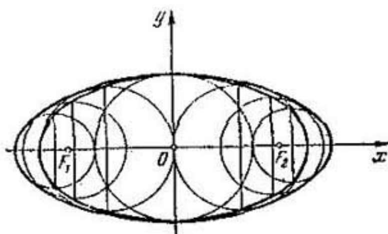


Fig. 136.

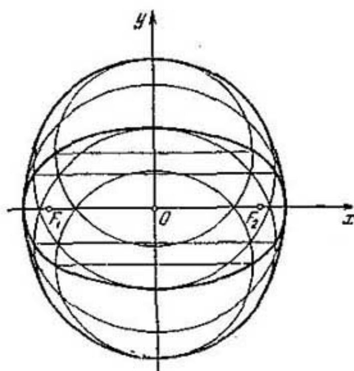


Fig. 137.

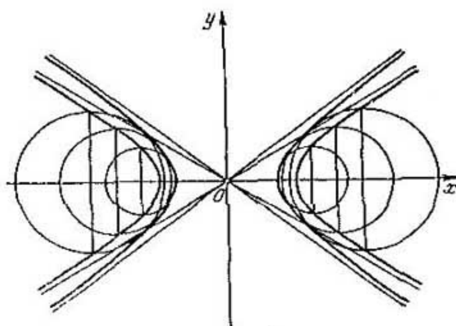


Fig. 138.

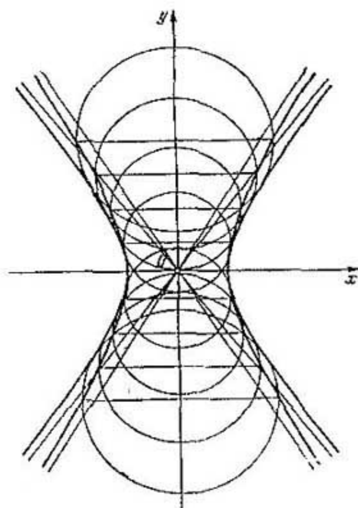


Fig. 139.

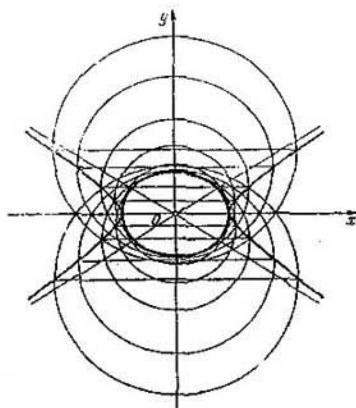


Fig. 140.

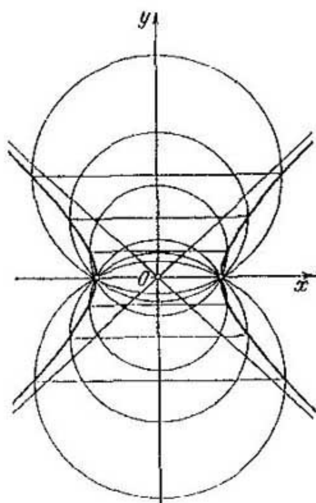


Fig. 141.

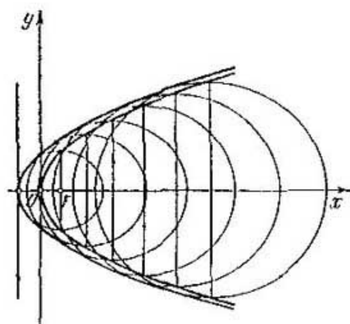


Fig. 142.

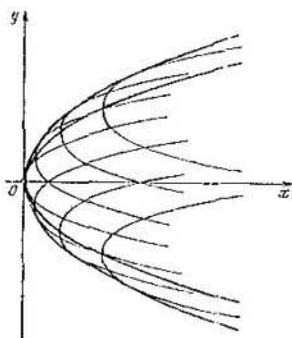


Fig. 143.

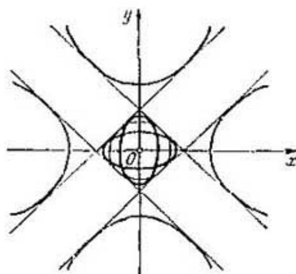


Fig. 144.

314. $x^k + y^k = a^k$, $k = m/(m+1)$; para $m = 2$ es una astroide para $m = 1$ es la parábola $(x-y)^2 - a(2x+2y-a) = 0$; para $m = -2$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

315. Elijamos en el plano vertical dado el sistema de cordenadas xOy, colocando el origen del mismo en el punto dado y orientando el eje Oy verticalmente hacia arriba. Entonces las ecuaciones paramétricas de las líneas de la familia serán $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{gt^2}{2}$, donde α es el parámetro de la familia. Tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_0 \cos\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -v_0 t \operatorname{sen}\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = v_0 t \cos\alpha.$$

Igualando al cero el jacobiano $\frac{D(x,\ y)}{D(t,\ \alpha)}$, obtenemos $v_0^2 t - g t^2 v_0 \times \operatorname{sen}\alpha = 0$, de donde $t = \frac{v_0}{g \operatorname{sen}\alpha}$ y las ecuaciones paramétricas del discriminante tienen la forma

$$x = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{ctg}\alpha, \qquad y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Eliminando α, obtenemos

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Así, el discriminante es una parábola cuyo eje está orientado verticalmente hacia abajo por el eje Oy, el parámetro es igual a v_0^2/g y el vértice se encuentra en el punto $M_0(0,\ v_0^2/2g)$. El discriminante es una envolvente (fig. 145).

316. Las ecuaciones de la familia (fig. 146) son: $x = a\cos v \cos u$, $y = a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u$. Igualando a cero el jacobiano $\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$, obtenemos $\operatorname{sen}^2 v \cos^2 u - \cos^2 v \operatorname{sen}^2 u = 0$, o bien $\operatorname{sen}(u+v)\operatorname{sen}(u-v) = 0$, o bien $v = -u$, $v = \pi - u$, $v = u$, $v = -\pi + u$. El discriminante se compone de cuatro segmentos de las rectas

$$x \pm y = \pm a.$$

Estos son cuatro lados del cuadrado con vértices en los puntos de intersección de los diámetros de circunferencia que descansan sobre los ejes de coordenadas con la misma circunferencia. Cada uno de los lados del cuadrado es una envolvente (fig. 147).

317. $s = \frac{1}{27}\left[(4+9x_2)^{3/2} - (4+9x_1)^{3/2}\right]$.

318. $s = \sqrt{1+x_2^2} - \sqrt{1+x_1^2} - \ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right| + \ln\frac{1+\sqrt{1+x_1^2}}{1+\sqrt{1+x_2^2}}$.

319. $s = a\left(\operatorname{sh}\frac{x_2}{a} - \operatorname{sh}\frac{x_1}{a}\right)$.

320. $s = \ln \left| \frac{\operatorname{sh} x_2}{\operatorname{sh} x_1} \right|$.

321. $s = a\,(t_2^2 - t_1^2)/2$.

322. $s = a\,(\ln \operatorname{sen} t_2 - \ln \operatorname{sen} t_1)$, donde $0 < t_1,\ t_2 \leqslant \pi/2$ o bien $\pi/2 \leqslant t_1,\ t_2 < \pi$.

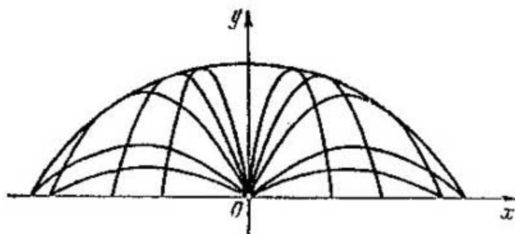


Fig. 145.

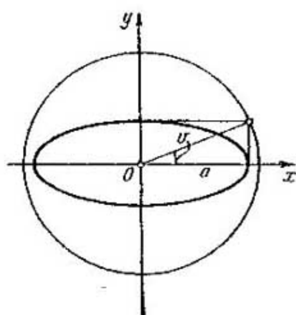


Fig. 146.

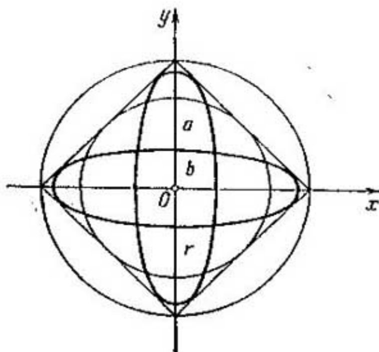


Fig. 147.

323. $s = \ln \operatorname{tg}\,(5\pi/12)$.

324. $s = 2\sqrt{3}$.

325. $s = \frac{15}{4} + \ln 2$.

326. $s = \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$.

327. $s = (\operatorname{ch} 4 - 1)/2$.

328. $s = 24a$.

329. $s = 2a[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

330. $s = 8a$.

331. $s = 8am(m+1)$. **332.** $s = 6a$.
333. $s = 8a$.
334. $s = 16a/3$.
335. $s = \frac{3}{2}\pi a$.
336. $s = \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right]$.
338. Una catenaria. El punto A es el vértice.
342. $x = R\cos(s/R)$, $y = R \operatorname{sen}(s/R)$.
343. $x = \operatorname{Arsh}(s/a)$, $y = \sqrt{a^2+s^2}$.
344. $k = |\operatorname{sen} x|/(1+\cos^2 x)^{3/2}$.
345. $k = a/y^2$.
346. $k = \sqrt{p}/(p+2x)^{3/2} = p^2/(y^2+p^2)^{3/2}$.
347. $k = \frac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}$. **348.** $k = \frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$.
349. $k = \frac{ab}{(a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}$.
350. $k = \frac{1}{4a|\operatorname{sen}(t/2)|}$. **351.** $k = 2/(3a|\operatorname{sen} 2t|)$.
352. $k = (2+\varphi^2)/a(1+\varphi^2)^{3/2}$.
353. $k = \frac{3}{4a|\cos(\varphi/2)|}$.

354. $$k = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}.$$

355, 356. $k = \frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}} = \frac{ab}{|a^2-\varepsilon^2x^2|^{3/2}}$,

donde ε es la excentricidad.
357. $k = 0$.

358. $$k = \frac{\left|P\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + Q\left(P\frac{\partial P}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right|}{(P^2+Q^2)^{3/2}}.$$

359. INDICACIÓN. $h = |t \times \Delta r|$, donde t es el vector unitario de la tangente.
363. $R = a \operatorname{ctg} t$.
367. El centro de curvatura de la elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ en el vértice A $(t = 0)$ es D $(c^2/a,\ 0)$ y en el vértice B $(t = \pi/2)$ es E $(0,\ -c^2/b)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$. Los puntos D y E se encuentran en la intersección de la perpendicular bajada desde el punto C $(a,\ b)$ a AB con los ejes de las coordenadas (fig. 148).

368. $\left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}$, $\quad x^2 + \left(y + \frac{c^2}{b}\right)^2 = \frac{a^4}{b^2}$.

369. $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+(y-1)^2=1$.

370. $(x-2)^2+(y-2)^2=2, \quad (x+2)^2+(y+2)^2=2$.

371. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

372. Los puntos en los cuales la curvatura es mínima: $((2n+1)\,a\pi,\ a+d)$; los puntos en los cuales la curvatura es máxima: $(2na\pi,\ a-d)$ (n es un número natural cualquiera).

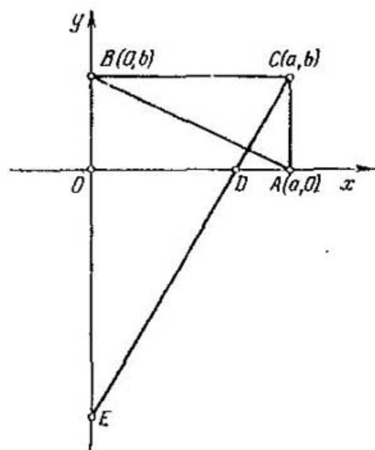


Fig. 148.

373. $A\ (3\pi/2,\ a)$ y $B\ (0,\ 0)$.

376. $r=\frac{(y^2+p^2)^{3/2}}{p^2}; \quad x_0=p+\frac{3y^2}{2p},\ y_0=-\frac{y^3}{p^2}$.

Hay tangencia de tercer orden en el vértice $O\ (0,\ 0)$ de la parábola.

377. Supongamos que la línea l_1 está definida por su ecuación vectorial $r_1 = r_1(s)$, donde s es la longitud del arco de esta línea, leído a partir del punto M y como origen O de la lectura de los radios vectores se toma el punto M. Escribamos las ecuaciones de la línea l_1 con respecto al sistema de referencia de Frenet, tomado en el punto M. Sustituyendo en el desarrollo $r_1(s) = s\dot{r}_1 + \frac{s^2}{2}\ddot{r}_1 + \ldots$ las

expresiones $\dot{r}_1 = t_1$, $\ddot{r}_1 = k_1 n_1$, obtenemos

$$x = s + \ldots, \quad y = \frac{k_1}{2} s^2 + \ldots \qquad (*)$$

De un modo análogo para la línea l_2

$$x = s + \ldots, \quad y = \frac{k_2}{2} s^2 + \ldots \qquad (**)$$

Sea P un punto sobre la tangente l, próximo al punto M, y supongamos que la perpendicular a l trazada en el punto P corta las líneas l_1, l_2 en los puntos M_1, M_2. Entonces de las ecuaciones (*), (**) obtenemos, respectivamente,

$$|PM_1| = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \ldots, \qquad |PM_2| = \frac{1}{2} k_2 x^2 + \ldots .$$

Como $k_1 < k_2$, entonces $|PM_1| < |PM_2|$ (fig. 149).

380. $y = 1 \pm \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{8} \right)$.

381. $\left(y - \frac{8}{5} \right)^2 = \frac{2}{5} \left(\frac{7}{5} - x \right)$.

382. Es un punto, centro de la circunferencia.

383. $X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$, $\quad Y = \frac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 t$ (fig. 150).

384. $X = \frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{ch}^3 t$, $\quad Y = \frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{sh}^3 t$ (fig. 151).

385. $X = -4x^3$, $\quad Y = 3x^2 + \frac{1}{2}$ (fig. 152).

386. $X = \frac{1}{2k-1} [(2k-2) x - 4k^2 x^{4k-1}]$,

$Y = \frac{1 + 2k (4k-1) x^{4k-2}}{2k (2k-1) x^{2k-2}}$ (fig. 153).

387. $X = \frac{1}{2k} [(2k-1) x - (2k+1)^2 x^{4k+1}]$,

$Y = \frac{1 + (2k+1)(4k+1) x^{4k}}{2k (2k+1) x^{2k-1}}$ (fig. 154).

388. $X = 2x + \frac{1}{x}$, $\quad Y = \ln x - x^2 - 1$ (fig. 155).

389. $X = x + \cos x \frac{1 + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$, $\quad Y = -\frac{2 \cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$ (fig. 156).

390. $X = x - \frac{1 + \cos^4 x}{\cos^3 x \operatorname{sen} 2x}$, $\quad Y = \operatorname{tg} x + \frac{1 + \cos^4 x}{\operatorname{sen} 2x}$,
$-\pi/2 < x < \pi/2$ (fig. 157).

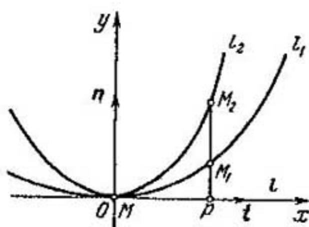


Fig. 149.

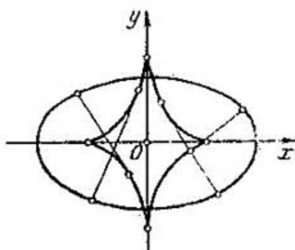


Fig. 150.

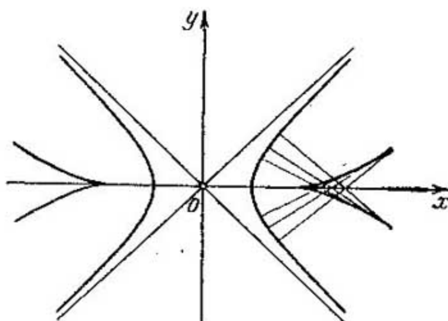


Fig. 151.

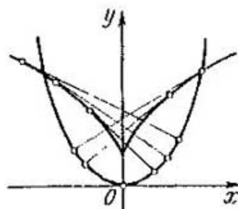


Fig. 152.

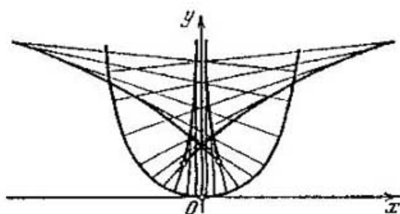


Fig. 153.

391. $X = a \ln \operatorname{tg}(t/2)$, $Y = a/\operatorname{sen} t$ o $Y = a \operatorname{ch}(X/a)$ (fig. 158).

392. $X = \frac{a}{3}(\cos\varphi - \cos^2\varphi + 2)$, $Y = \frac{a}{3}(1 - \cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$.

Es una cardioide (fig. 159). Para la demostración es suficiente efectuar

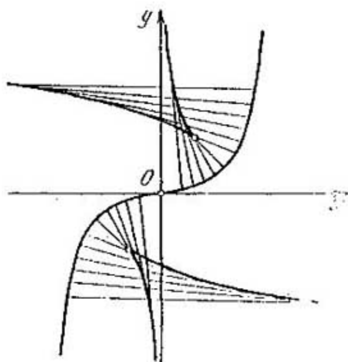


Fig. 154.

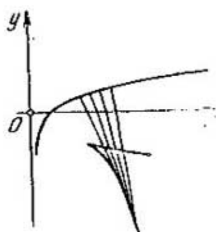


Fig. 145.

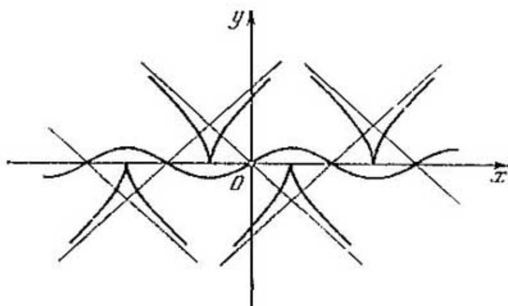


Fig. 156.

la sustitución del parámetro $\varphi = \pi - t$ y la transformación de las coordenadas por las fórmulas $X' = -\left(X - \frac{2}{3}a\right)$, $Y' = Y$.

393. Fig. 160. 394. Fig. 161.

395. Fig. 162. 396. $\ln a = a^{\pi/2}$.
397. $X = a(\cos t + (t - C)\operatorname{sen} t)$, $Y = a(\operatorname{sen} t - (t - C)\cos t)$, donde C es el parámetro de la familia de evolventes (fig. 163).

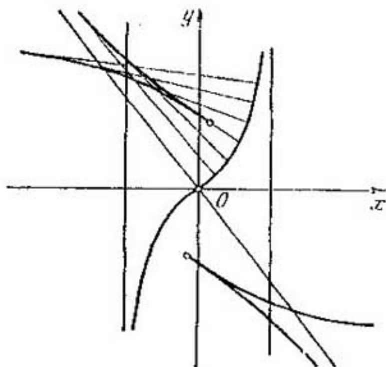


Fig. 157.

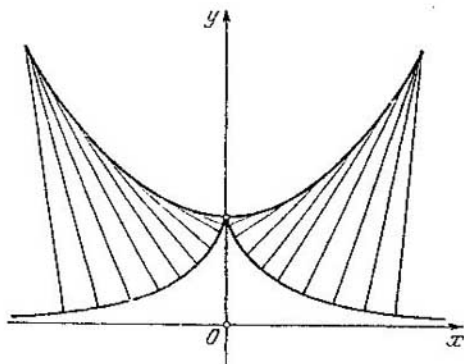


Fig. 158.

398. $X = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $Y = a \operatorname{sen} t$, la tractriz (véase la fig. 158).

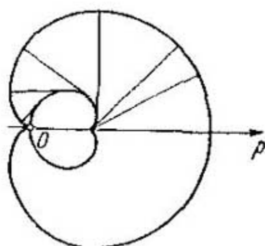


Fig. 159.

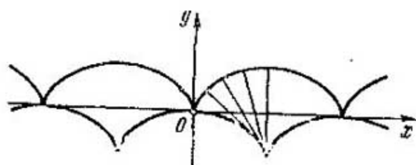


Fig. 160.

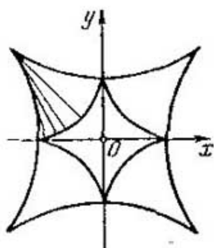


Fig. 161.

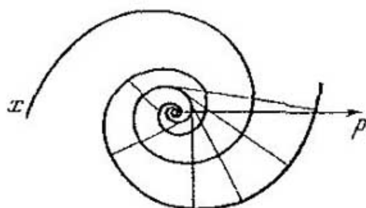


Fig. 162.

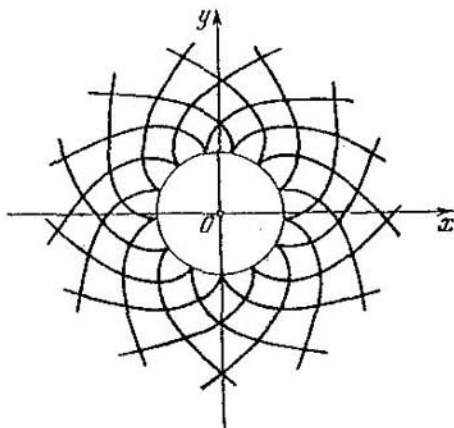


Fig. 163.

399. $X = \frac{t}{2} + \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}(C - \ln(t + \sqrt{t^2+4}))$, $Y = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} \times$ $\times (C - \ln(t + \sqrt{t^2+4}))$.

400. $s = 6a$.

INDICACIÓN. Válgase de la siguiente propiedad de la evoluta: si el radio de curvatura de la línea se cambia monótonamente, entonces la longitud del arco de la evoluta comprendido entre dos puntos suyos es igual a la diferencia de valores del radio de curvatura de la línea inicial en estos puntos.

401. 402. $s = 8a$.

403. $(27s+8)^2 = \left[4 + 9\frac{36R^2}{(27s+8)^2}\right]^3$.

404. $s = \sec\alpha + \ln \operatorname{tg}(\alpha/2)$, $k = \operatorname{sen}\alpha \cos^2\alpha$, donde $\operatorname{tg}\alpha = x$.
405. $R^2 = 2as$.
406. $R^2 + a^2 = a^2e^{-2s/a}$.
407. $s^2 + 9R^2 = 16a^2$.
408. Una circunferencia de radio $1/a$, si $a \neq 0$, y una recta si $a = 0$.
409. Una espiral logarítmica.
410. Supongamos que $s = \operatorname{tg}\alpha$. Entonces

$$x = \frac{a}{2}\ln\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}, \quad y = \frac{a}{\cos\alpha};$$

de aquí, $y = \operatorname{ch}(x/2)$ es una catenaria.
411. $x = a(2t + \operatorname{sen} 2t)$, $y = a(2 - \cos 2t)$, es una cicloide.

412. $x = -\frac{a}{2\operatorname{sen}^2\alpha}$, $y = -a\operatorname{ctg}\alpha$, una parábola.

413. $x = \frac{a}{2}e^{\alpha}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$, $y = \frac{a}{2}e^{\alpha}(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$, es una espiral logarítmica.

414. $x = a(\alpha\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$, $y = a(\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha)$, la evolvente de una circunferencia.

415. $x = a\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$, $y = \frac{a}{\cos\alpha}$, es una catenaria.

416. Si los ejes de coordenadas se eligen del modo indicado en la fig. 164, entonces las ecuaciones paramétricas de la cicloide requerida se escriben de la forma

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

La velocidad de un cuerpo que cae se determina por la fórmula $v = \sqrt{2gh}$. En nuestro problema

$$h = y - y_0 = a(\cos t_0 - \cos t),$$

donde t_0 y t corresponden a los puntos M_0 y M. Por eso

$$v = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}.$$

Pero la velocidad v es la derivada del camino s con respecto al tiempo T:

$$v = \frac{ds}{dT}.$$

Observando que para la cicloide

$$ds = 2a \operatorname{sen}(t/2)\, dt,$$

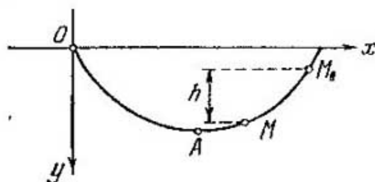


Fig. 164.

obtenemos la ecuación diferencial para determinar el tiempo T:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2a \operatorname{sen}(t/2)}{\sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}.$$

Integrándola, encontramos el tiempo T gastado por el punto material para trasladarse desde M_0 a A:

$$T = \int_{t_0}^{\pi} \frac{2a \operatorname{sen}(t/2)\, dt}{\sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}} =$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{d\cos(t/2)}{\sqrt{\cos^2(t_0/2) - \cos^2(t/2)}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

que es lo que se necesitaba demostrar.

417. $x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t,\ z = bt$ (fig. 165). Las proyecciones son: 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $y = a\operatorname{sen}(z/b)$; 3) $x = a\cos(z/b)$.

418. $x = a\cos\varphi,\ \ y = a\operatorname{sen}\varphi,\ \ z = be^{k\varphi}$.

419. Eligiendo del modo correspondiente el sistema de coordenadas, escribamos las ecuaciones de la imagen de la curva de Viviani (fig. 166) en la forma

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 - Rx &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Tomando por parámetro u la longitud del punto M sobre la esfera, de los triángulos AOP, OPM y OPQ hallamos

$$x = R\cos^2 u, \qquad y = R\cos u \operatorname{sen} u, \qquad z = \pm R\operatorname{sen} u.$$

Son posibles también otras ecuaciones paramétricas. En particular, escribiendo la ecuación

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

en la forma

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

y suponiendo que

$$x - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\cos t, \quad y = \frac{R}{2}\operatorname{sen} t,$$

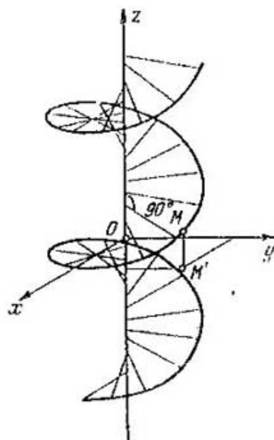


Fig. 165.

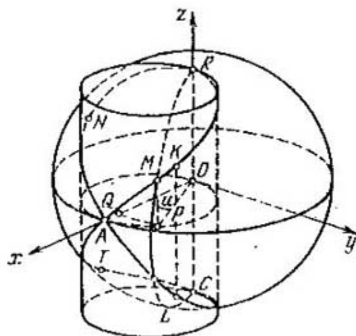


Fig. 166.

obtenemos

$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{R}{2}\operatorname{sen} t, \quad z = \pm R \operatorname{sen}\frac{t}{2}.$$

420. a) Introduciendo el sistema polar de coordenadas, la posición del punto M la determinamos por su distancia r a partir del punto O, por la latitud $\psi = \widehat{POL}$ y por la longitud $\varphi = \widehat{xOP}$ (fig. 167). Según el enunciado $\psi = \frac{\pi}{2} - \lambda$, donde $\lambda = \widehat{zOL}$ y $\varphi = \omega t$. Determinando r de la condición $\frac{dr}{dt} = mr$ y sustituyendo el valor hallado de

$r = r_0 e^{mt}$ en las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\psi\cos\varphi, \\ y &= r\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ z &= r\,\mathrm{sen}\,\psi, \end{aligned}\right\}$$

obtenemos

$$x = ae^{k\varphi}\cos\varphi, \quad y = ae^{k\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = be^{k\varphi},$$

donde $k = m/\omega$, $a = r_0\,\mathrm{sen}\,\lambda$, $b = r_0\cos\lambda$.

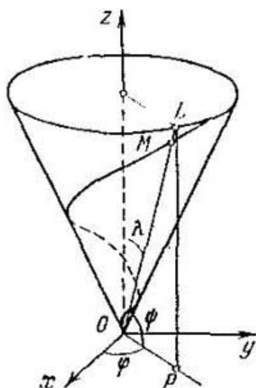


Fig. 167.

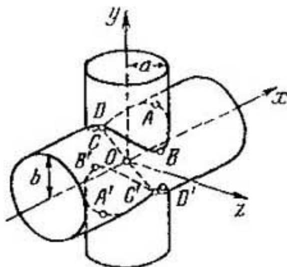


Fig. 168.

b) $x = at\cos t$, $y = at\,\mathrm{sen}\,t$, $z = bt$.

421. $$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= a^2, \\ y^2 + z^2 &= b^2, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= \pm\sqrt{b^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2\,t}, \\ z &= a\,\mathrm{sen}\,t. \end{aligned}\right\}$$

Para $a = b$ obtenemos dos elipses (fig. 168).

422. INDICACIÓN. Eliminar el parámetro t.

423. $y = x^2$, $z = 0$; $z = x^3$, $y = 0$; $z^2 = y^3$, $x = 0$.

424. $x^2 - y^2 = a^2$, $z = 0$; $x = a\,\mathrm{ch}\,(z/c)$, $y = 0$; $y = a\,\mathrm{sh}\,(z/c)$, $x = 0$.

425. $x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0$, $z = 0$.

INDICACIÓN. Eliminar z de estas ecuaciones.

428. Por ejemplo, $y = x^2$, $z = e^x$.
429. Las ecuaciones de los cilindros buscados son:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad \frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1.$$

432. Las rectas $x = y$, $z = 1$; $x = -y$, $z = 1$; $x = y$, $z = -1$; $x = -y$, $z = -1$.

433. $$\frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - \frac{a\pi}{4}}{a}.$$

434. $$\frac{x - e}{e} = \frac{y - e^{-1}}{-e^{-1}} = \frac{z - 1}{2}.$$

435. $x = y + 1 = z$.

436. $x + \frac{a}{2}(4 - \pi) = y = \frac{1}{\sqrt{2}} z - a$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

437. $M_1(-2, 12, 14)$, $M_2(-2, 3, -4)$.

438. $\left.\begin{aligned} x = 2, \\ 2y - z = 0, \end{aligned}\right\}$ $y + 2z = 0$.

439. $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$; $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

De la intersección de las tangentes con el plano xOy resulta la paráboba $y = \frac{3}{4} x^2$.

441. $\frac{X - x}{2yz} = \frac{Y - y}{z(R - 2x)} = \frac{Z - z}{-Ry}$; $2yzX + z(R - 2x)Y - RyZ = 0$.

442. La circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2/(a^2 + b^2), \quad z = b/\sqrt{a^2 + b^2}$$

(las ecuaciones de la hélice se toman en la forma $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$).

444. Sean $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ las ecuaciones paramétricas de la línea. Son justas las identidades

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0,$$
$$\Phi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0,$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0.$$

Estas relaciones determinan las relaciones de las diferenciales en la forma

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

De este modo, las ecuaciones de la tangente toman la forma

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

y la ecuación del plano normal

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}(Z-z)=0,$$

o bien

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

445. $\dfrac{X-x}{ay}=\dfrac{Y-y}{bx}=\dfrac{Z-z}{xy}$;

$ay(X-x)+bx(Y-y)+xy(Z-z)=0,\ x^2+y^2\neq 0.$

446. $\dfrac{X}{x}-\dfrac{Y}{y}+\dfrac{Z}{z}=1,\quad xyz\neq 0.$

451. $3x+3y+z+1=0,\ 3x-3y+z-1=0,$
$108x-18y+z-216=0.$

453. $bX+aY+abZ=2ab.$

454. $[X \operatorname{sen}(t-\alpha)-Y\cos(t-\alpha)]\operatorname{sen}\alpha+Z=t\operatorname{sen}\alpha+$ $+\cos\alpha.$

455. $4x-y+z-9=0.$

457. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-1}{-1}$ son las ecuaciones de la normal principal,

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{9}$ son las ecuaciones de la binormal.

458. $\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{-9}$ son las ecuaciones de la normal principal,

$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$ son las ecuaciones de la binormal.

460. $A(1,\ \ln 2,\ -4)$.

462. $t=\frac{j+k}{\sqrt{2}}, \quad n=\frac{2i-j+k}{\sqrt{6}}, \quad b=\frac{i+j-k}{\sqrt{3}}$,

463. $t=-\frac{3}{5}\cos t i+\frac{3}{5}\operatorname{sen} t j-\frac{4}{5}k,\ n=\operatorname{sen} t i+\cos t j,$

$$b=\frac{4}{5}\cos t i-\frac{4}{5}\operatorname{sen} t j-\frac{3}{5}k.$$

464. $t=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}i+\cos\frac{t}{2}j-k\right),\ n=\cos\frac{t}{2}i-\operatorname{sen}\frac{t}{2}j.$

$$b=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}i+\cos\frac{t}{2}j+k\right).$$

466. De la tangente:

$$\frac{X-a\cos t}{-a\operatorname{sen} t}=\frac{Y-a\operatorname{sen} t}{a\cos t}=\frac{Z-bt}{b};$$

del plano normal:

$$(a\operatorname{sen} t)X-(a\cos t)Y-bZ+b^2t=0;$$

de la binormal:

$$\frac{X-a\cos t}{a\operatorname{sen} t}=\frac{Y-a\operatorname{sen} t}{-b\cos t}=\frac{Z-bt}{a};$$

del plano osculador:

$$(b\operatorname{sen} t)X-(b\cos t)Y+aZ-abt=0;$$

de la normal principal:

$$\frac{X-a\cos t}{\cos t}=\frac{Y-a\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t},\ Z=bt;$$

el plano rectificante:

$$X\cos t+Y\operatorname{sen} t-a=0;$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\operatorname{sen} t i+a\cos t j+bk), \quad n=-\cos t i-\operatorname{sen} t j,$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\operatorname{sen} t i-b\cos t j+ak).$$

467. $\rho_1=r-\frac{r\cdot k}{\dot{r}\cdot k}\dot{r}, \quad \rho_2=r-\frac{r\cdot k}{\ddot{r}\cdot k}\ddot{r},$

$$\rho_3=r-\frac{\dot{r}\cdot k}{k\dot{r}\ddot{r}}(\dot{r}\times\ddot{r}).$$

donde el punto sobre la letra significa la derivación con respecto al parámetro s.

468. $s=\sqrt{a^2+b^2}t$.

469. $X=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $Y=a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $Z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

470. $s=8\sqrt{2}\,a$.

471. $s=9a$.

473. $s=a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$.

474. $ds^2=dr^2+r^2\,d\varphi^2+dz^2$.

INDICACIÓN. Las coordenadas cilíndricas r, φ, z están relacionadas con las coordenadas rectangulares cartesianas x, y, z por las fórmulas $x=r\cos\varphi$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z=z$ (fig. 169).

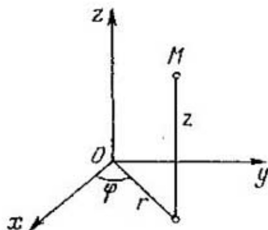


Fig. 169.

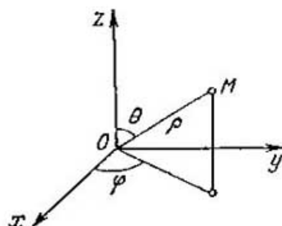


Fig. 170.

475. $ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\varphi^2$.

INDICACIÓN. Las coordenadas esféricas ρ, θ, φ están relacionadas con las coordenadas rectangulares cartesianas x, y, z por las fórmulas $x=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z=\rho\cos\theta$ (fig. 170).

476. INDICACIÓN. Empleandos las fórmulas de Frenet

$$\dot{t}=kn,\quad \dot{n}=-kt+\varkappa b,\quad \dot{b}=-\varkappa n$$

y tomado en consideración que $\dot{r}=t$, hallamos

$$\ddot{r}=kn,\quad \dddot{r}=\ddot{t}=(kn)^{\cdot}=-k^2t+k\varkappa b+\dot{k}n.$$

477. Escribiendo el vector buscado en la forma

$$\omega=at+bn+cb$$

y utilizando los datos del problema, hallamos

$$\omega=\varkappa t+kb.$$

El vector ω es la velocidad angular instantánea del sistema de referencia de Frenet al moverse el punto por la línea con la velocidad igual a la unidad.

484. $k=a/(a^2+b^2)$ $\varkappa=b/(a^2+b^2)$. 485. $k=2/(1+a^2)$.

486. $k=\varkappa=\dfrac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$.

487. $k=-\varkappa=\dfrac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$.

488. $k=-\varkappa=2t/(1+2t^2)^2$.

489. $k=\dfrac{3}{25\,\mathrm{sen}\,t\cos t}$, $\varkappa=\dfrac{4}{25\,\mathrm{sen}\,t\cos t}$.

490. $a=b$.

491. Los puntos correspondientes a los valores del parámetro

$$t=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

492. Los puntos correspondientes a los valores del parámetro

$$t=2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

494. $x-4y+2z+1=0$.

495.
$$\begin{vmatrix} x-c_1 & y-c_2 & z-c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

496. $f(t)=c_1+c_2\,\mathrm{sen}\,t+c_3\cos t$.

497. a) Sea a el vector unitario de la dirección fija. Entonces

$$a\cdot t=\cos v \quad (v=\mathrm{const}). \qquad (*)$$

Derivamos la igualdad (*) con respecto a s:

$$a\cdot\dot{t}=0.$$

Por consiguiente, $ka\cdot n=0$. Excluyendo el caso en que $k\equiv 0$ (rectas), obtenemos

$$a\cdot n=0. \qquad (**)$$

Por lo tanto, las normales principales son perpendiculares a la dirección fija.

Y viceversa, si el vector n en el punto corriente es perpendicular a la dirección fija, entonces es cierta la igualdad (*).

b) Suponiendo que $\varkappa\neq 0$ y teniendo en cuenta la tercera fórmula de Frenet, obtenemos de (**)

$$a\cdot\dot{b}=0,$$

de donde

$$a\cdot b=\mathrm{const}. \qquad (***)$$

Por el contrario, diferenciando (***), obtenemos (**).

c) Diferenciando (**), obtenemos

$$ka \cdot t = \varkappa a \cdot b,$$

de donde

$$\frac{k}{\varkappa} = (a \cdot b)/(a \cdot t) = \text{const}.$$

Inversamente, de la primera y de la tercera fórmulas de Frenet se deduce

$$\frac{\dot{t}}{k} + \frac{\dot{b}}{\varkappa} = 0,$$

de donde

$$\frac{\varkappa}{k}\,\dot{t} + \dot{b} = 0, \quad \frac{\varkappa}{k}\,t + b = \text{const} = a.$$

Multiplicando escalarmente por n, obtenemos $a \cdot n = 0$. Por lo tanto, se cumple la condición (**).

498. INDICACIÓN.

$$\dot{r}\;\ddot{r}\;\dddot{r} = k^5 \left(\frac{\varkappa}{k}\right)^{\cdot},$$

luego válgase del problema 497.

501. Sea $(1, u, v)$ la dirección fija. El ángulo comprendido entre la tangente a la línea y esta dirección se define por la ecuación

$$\cos\varphi = \frac{a + 2btu + 3ct^2v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}\,\sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4}}.$$

La condición de independencia de φ con respecto a t consiste en que la fracción

$$\frac{(3cvt^2 + 2btu + a)^2}{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2} = \frac{9c^2v^2t^4 + 12bcuvt^3 + 2(2b^2u^2 + 3acv)\,t^2 + 4abut + a^2}{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2}$$

no depende de t. Para esto es suficiente que

$$4abu = 0, \quad 12bcuv = 0, \quad \frac{9c^2v^2}{9c^2} = \frac{2(2b^2u^2 + 3acv)}{4b^2} = \frac{a^2}{a^2},$$

de donde

$$u = 0, \; v^2 = 1, \; 2b^2 = \pm 3ac.$$

502. INDICACIÓN. En este caso $\dot{e} \cdot t = 0$. Diferénciese esta relación y empléense las fórmulas de Frenet.

505. La ecuación de las líneas se puede escribir de la forma

$$r = r(s), \quad \rho = r + \lambda n. \qquad (*)$$

Dado que $\rho' \perp n$ hallamos que $\lambda = \text{const}$, de la condición de carácter coplanar de los vectores ρ', ρ'', n obtenemos

$$\dot{\varkappa} + \lambda (\dot{k}\varkappa - k\dot{\varkappa}) = 0.$$

Dividamos la última igualdad por $\varkappa^2$:

$$\left(-\frac{1}{\varkappa}\right)^{\cdot} + \lambda \left(\frac{k}{\varkappa}\right)^{\cdot} = 0, \qquad (^{**})$$

$$-\frac{1}{\varkappa} + \lambda \frac{k}{\varkappa} = -\mu,$$

de donde

$$\lambda k + \mu\varkappa = 1 \qquad (^{***})$$

Inversamente. De (***) se deduce (**). Sustituyendo el valor de λ de (**) en (*) obtenemos la ecuación de la línea buscada.

509. Según el enunciado del problema $t^* = t$. Derivando esta igualdad con respecto a s, obtenemos

$$k^* n^* \frac{ds^*}{ds} = kn.$$

Pero como $n^* = n$, entonces

$$k^* \frac{ds^*}{ds} = k. \qquad (^*)$$

Luego, derivando con respecto a s la igualdad $b^* = b$, obtenemos

$$-\varkappa^* n^* \frac{ds^*}{ds} = -\varkappa n,$$

de donde

$$\varkappa^* \frac{ds^*}{ds} = \varkappa. \qquad (^{**})$$

Por último, comparando (*) y (**), encontramos las relaciones buscadas

$$\frac{k^*}{k} = \frac{ds}{ds^*} = \frac{\varkappa^*}{\varkappa}.$$

510. $k^* = \dfrac{\sqrt{k^2 + \varkappa^2}}{|s|k}$ $\quad \varkappa^* = \dfrac{\varkappa^2}{sk(k^2 + \varkappa^2)} \left(\dfrac{k}{\varkappa}\right)^{\cdot}$.

Si $\dfrac{k}{\varkappa} = \text{const}$, entonces $\varkappa^* = 0$.

512. $x = \dfrac{k}{k^2 + \varkappa^2} \cos \varphi$, $\quad y = \dfrac{k}{k^2 + \varkappa^2} \operatorname{sen} \varphi$, $\quad z = \dfrac{k}{k^2 + \varkappa^2} \varphi$.

513. La curvatura y la torsión de la hélice son constantes; por consiguiente existe un número infinito de pares de valores de λ y μ para los cuales $\lambda k + \mu\varkappa = 1$. A ellos les corresponden las hélices que están sobre los cilindros coaxiales al dado.

Inversamente, supongamos que a la línea de Bertrand C le corresponden dos líneas que tengan con la dada las normales principales

comunes. Entonces

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 k+\mu_1 \varkappa=1,\\ \lambda_2 k+\mu_2 \varkappa=1,\end{array}\right\} \qquad (*)$$

donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y, por lo tanto, $\mu_1 \neq \mu_2$. No puede ser $\lambda_1/\lambda_2 = \mu_1/\mu_2$, pues entonces de $(*)$ resultaría que $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$. Por lo tanto, $\begin{vmatrix}\lambda_1 \mu_1\\ \lambda_2 \mu_2\end{vmatrix} \neq 0$ y de las relaciones $(*)$ obtenemos determinados valores para k y $\varkappa$ (constantes), o sea, la línea es una hélice.

514. $k=\varkappa=\dfrac{a}{2a^2+s^2}$. 515. $k=\varkappa=\dfrac{c\sqrt{2}}{4c^2+s^2}$.

517. Lo inverso no es cierto, ya que en la expresión del vector $\dddot{r}$ entra $\dot{\varkappa}$.

518. Como la distancia entre dos puntos de la línea es equivalente a la longitud del arco Δs entre ellos, entonces el problema se reduce al cálculo de la distancia mínima entre las rectas

$$\rho = r(s) + e(s)\lambda,$$
$$\rho = r(s+\Delta s) + e(s+\Delta s)\lambda,$$

donde $e(s)$ es sucesivamente igual a t, n, b.

Calculemos la distancia mínima por la fórmula

$$d=\frac{|(r(s+\Delta s)-r(s),\ e(s),\ e(s+\Delta s))|}{\sqrt{(e(s)\times e(s+\Delta s))^2}},$$

para $e=t$

$$d_1=\frac{|(\Delta r,\ t(s),\ t(s+\Delta s))|}{\sqrt{(t(s)\times t(s+\Delta s))^2}}=\frac{|(\Delta r,\ t,\ \Delta t)|}{\sqrt{(t\times\Delta t)^2}},$$

$$\Delta r = t\Delta s+\frac{1}{2}kn\Delta s^2+\frac{1}{6}(\varkappa kb+\dot{k}n-k^2t)\Delta s^3+\ldots,$$

$$\Delta t = kn\Delta s+\ldots,$$

de donde

$$d_1=\frac{\Delta s^3}{6}k\varkappa+\ldots;$$

d_1 es un infinitésimo de tercer orden si $k\varkappa \neq 0$. De un modo análogo hallamos que d_2 y d_3 son infinitésimos de primer orden.

520. Cuando el paso de la hélice es igual a la longitud de la circunferencia del cilindro.

522. $R=(e^t+e^{-t})^2\sqrt{\dfrac{1}{2}+(e^t-e^{-t})^2}$.

523. $R=3\sqrt{2}\,e^t$.

526. La hélice cuyo paso es igual al de la hélice inicial y que está sobre un cilindro circular con eje Oz y radio b^2/a.

528. $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\operatorname{sen} v$, $z = g(u)$ (fig. 171).

529. $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u)\operatorname{sen} v$, $z = b\operatorname{sen} u$ (fig. 172).

530. $x = a\operatorname{ch}(u/a)\cos v$, $y = a\operatorname{ch}(u/a)\operatorname{sen} v$, $z = u$ (fig. 173.)

531. $x = a\operatorname{sen} u\cos v$, $y = a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v$, $z = a(\ln\operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$ (fig. 174).

532. Una vez escritas las ecuaciones de dos familias de generatrices rectilíneas y despejados de ellas x, y, z, obtendremos

$$x = a(u + v) \quad y = b(v - u), \quad z = 2uv \qquad \text{(fig. 175)}.$$

Las ecuaciones paramétricas de la superficie $z = pxy$ son:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = puv.$$

533. $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = v$.

534. $x = a\operatorname{ch} u$, $y = b\operatorname{sh} u$, $z = v$, del cilindro hiperbólico (véase la fig. 12);

$x = u$, $y = u^2$, $z = v$, del cilindro parabólico (véase la fig. 11).

535. $r = \rho(u) + vc$.

536. $x = u + v$, $y = u^2 + 2v$, $z = u^3 + 3v$.

537. Las ecuaciones paramétricas de la supercicie son:

$$x = \cos u - v, \quad y = \operatorname{sen} u + 3v, \quad z = -2v,$$

de donde

$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}z\right)^2 = 1.$$

538. INDICACIÓN. Si la directriz está definida por las ecuaciones

$$X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t),$$

entonces las ecuaciones paramétricas de la superficie cilíndrica serán

$$x = X(t) + \lambda l, \quad y = Y(t) + \lambda m, \quad z = Z(t) + \lambda n.$$

Eliminando de aquí λ y t, obtenemos una ecuación de la forma

$$f(nx - lz, \; ny - mz) = 0.$$

539. $(nx - lz)^2 + (ny - mz)^2 = an(ny - mz)$.

540. b) Por ejemplo, $x = v^2 + 1$, $y = v^2 - 1$, $z = 2v$;

c) $\dfrac{x-16}{3} = \dfrac{y-12}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

541. $x - a = v[f(u) - a]$, $y - b = v[\varphi(u) - b]$, $z - c = v[\psi(u) - c]$.

Eliminando de estas ecuaciones los parámetros u y v, obtenemos una ecuación de la forma

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

542. $(bz - cy)^2 = 2p(z - c)(az - cx)$.

543. $(x + 1)^2 = 2y^2 + z^2$.

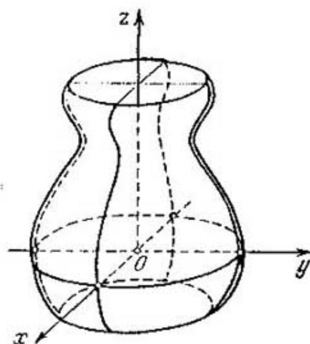


Fig. 171.

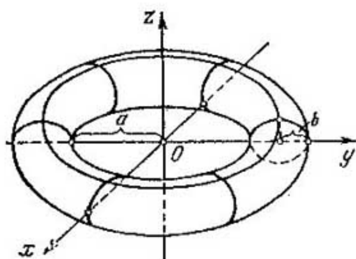


Fig. 172.

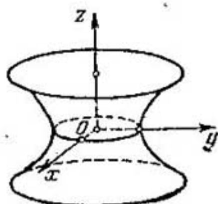


Fig. 173.

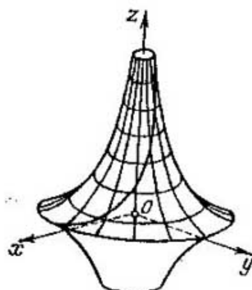


Fig. 174.

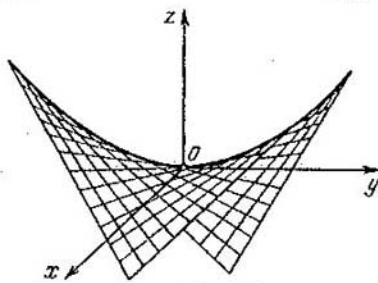


Fig. 175.

544. A pertenece, B no pertenece.
545. Un cilindro elíptico.

546. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$, una elipsoide.

547. El paraboloide de rotación $z=x^2+y^2$.

548. u es la distancia entre el punto y el vértice del cono, v es la longitud del arco de la línea cuyos puntos están alejados del vértice a una distancia 1.

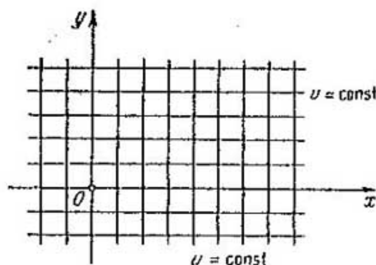


Fig. 176.

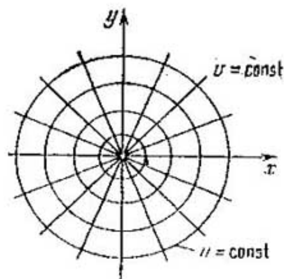


Fig. 177.

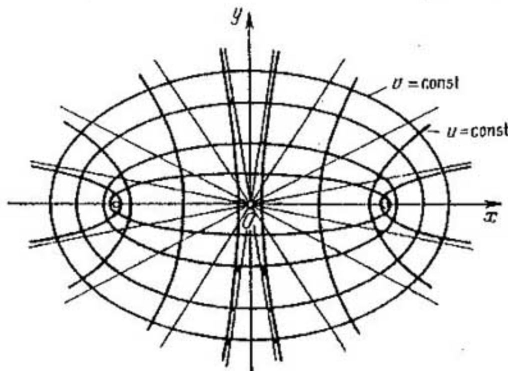


Fig. 178.

549. Dos familias de rectas paralelas (fig. 176).

550. Los rayos que parten del origen de las coordenadas y una familia de circunferencias concéntricas con centro en el mismo (fig. 177),

551. Las líneas $v =$ const son una familia de elipses confocales y un segmento $[-1, 1]$ del eje Ox; las líneas $u =$ const son una familia de hipérbolas confocales e intervalos$]-\infty, 1]$ y $[1, \infty[$ del eje Ox (fig. 178).

552. Las generatrices rectilíneas.

553. a) $x = a\cos(u+v)$, $y = a\operatorname{sen}(u+v)$, $z = bu$;

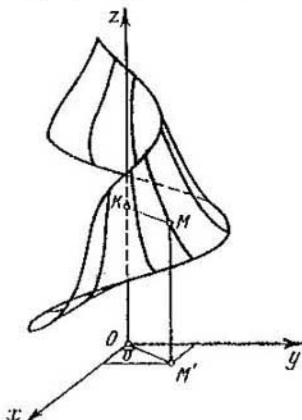


Fig. 179.

b) $x = a\cos u$, $y = a\operatorname{sen} u$, $z = bu + v$;
c) $x = a\cos(u+v)$, $y = a\operatorname{sen}(u+v)$, $z = b(u-v)$.

554. $r = \rho(u) + v\rho'(u)$.

555. Las ecuaciones de la figura

$x = a(\cos u - v\operatorname{sen} u)$, $\quad y = a(\operatorname{sen} u + \cos u)$, $\quad z = b(u+v)$.

No es una superficie. Sin embargo, si de la figura se excluyen los puntos de la hélice inicial, se obtiene una superficie.

556. Si como eje de rotación se toma Oz, entonces las ecuaciones del helicoide tendrán la forma

$$x = u\cos v,\quad y = u\operatorname{sen} v,\quad z = f(u) + av,$$

donde u es la distancia $|MK|$ entre el punto M del helicoide y el eje; v es el ángulo de giro del plano de perfil, medido a partir del plano xOz; a es una constante, o sea, la relación entre la velocidad del movimiento de avance y la velocidad angular (fig. 179).

557. $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = av$, es la ecuación del helicoide directo (fig. 180). $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = mu + av$, la del helicoide oblicuo (fig. 181).

558. $x = a(1-u)\cos v$, $y = a(1-u)\operatorname{sen} v$, $z = bv$, es la ecuación del helicoide directo.

559. $x = u\cos v,\ y = u \operatorname{sen} v,\ z = f(v)$.
En particular, si

$$f(v) = av + b,$$

se obtiene un helicoide directo.

560. $z(x^2 + y^2) = 2axy$.

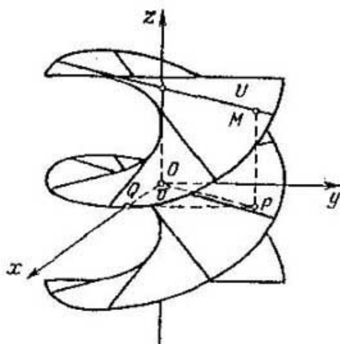


Fig. 180.

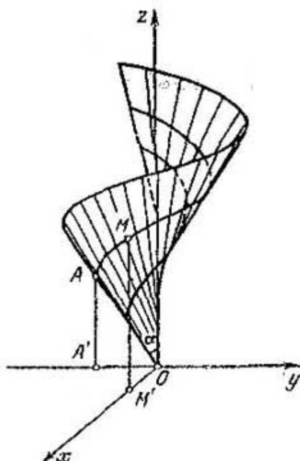


Fig. 181.

561. $x = u\cos v,\ y = u \operatorname{sen} v,\ z = a/\cos v$.

562. $$r = \rho(s) + a\left(\frac{\ddot{\rho}}{|\ddot{\rho}|}\cos\alpha + \frac{\dot{\rho}\times\ddot{\rho}}{|\dot{\rho}\times\ddot{\rho}|}\operatorname{sen}\alpha\right),$$

donde α es el ángulo comprendido entre la normal principal de la línea y el radio de la circunferencia, que va a un punto arbitrario de la superficie del tubo.

565. En vez de u y v introduzcamos las nuevas variables φ y ψ mediante las fórmulas

$$u = c\cos\frac{\varphi - \psi}{2}, \quad v = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi - \psi < \frac{\pi}{2},$$

y sustituyamos estos valores en la ecuación vectorial del helicoide

$$r = u(\cos v\, i + \operatorname{sen} v\, j) + avk.$$

Haciendo

$$\rho(t) = c(\cos ti + \operatorname{sen} tj) + atk,$$

obtenemos la ecuación del helicoide en la forma

$$r = \frac{1}{2}\rho(\varphi) + \frac{1}{2}\rho(\psi).$$

566. Las ecuaciones de los paraboloides

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$$

se pueden representar de la forma

$$r = \left(ui + \frac{u^2}{2p}k\right) + \left(vj \pm \frac{v^2}{2q}k\right).$$

567. Sea $M_0(x_0, y_0, z_0)$ cierto punto de una superficie de segundo orden $f(x, y, z) = 0$. Una recta arbitraria que pasa por el punto M_0:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{1}$$

corta esta superficie en el punto M cuya z-coordenada se determina por la ecuación de segundo grado

$$f(x_0 + u(z - z_0), \quad y_0 + v(z - z_0), z) = 0.$$

Esta ecuación tiene, por suposición, una raíz z_0 de donde resulta que la segunda raíz, la cual es la z-coordenada del punto M, se expresará mediante una función racional de u y v, con lo que se demuestra la afirmación.

569. a) Las rectas tangentes son:

$$y = 0, \ z = \lambda \quad \text{y} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - \lambda}{\lambda};$$

los planos normales:

$$x - 1 = 0, \quad (x - 1) + y + \lambda(z - \lambda) = 0;$$

b) $\cos\alpha = -1/\sqrt{2 + \lambda^2}$.

571. $18x + 3y - 4z - 41 = 0$.

572. $3x - y - 2z - 4 = 0$; $\quad \dfrac{x - 3}{3} = \dfrac{y - 1}{-1} = \dfrac{z - 2}{-2}$.

573. $6x + 3y - 2z - 7 = 0$; $\quad \dfrac{x - 1}{6} = \dfrac{y - 3}{3} = \dfrac{z - 4}{-2}$.

574. $x + y - \sqrt{2}\,z = 0$; la normal es $\dfrac{x - \sqrt{2}}{1} = \dfrac{y - \sqrt{2}}{1} =$

$= \dfrac{z - 2}{-\sqrt{2}}$; la tangente a la línea es $u = 2$; $x + y = 2\sqrt{2}$, $z = 2$.

575. $3x + 12y - z - 18 = 0$; $\quad \dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 2}{12} = \dfrac{z - 9}{-1}$.

576. $3x+4y+12z-169=0$; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$.

577. $3x-2y+3z-4=0$; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$.

578. $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$;

$$x=x_0\left(1+\frac{t}{a^2}\right),\quad y=y_0\left(1+\frac{t}{b^2}\right),\quad z=z_0\left(1+\frac{t}{c^2}\right).$$

579. $x\cos u\cos v+y\cos u\,\mathrm{sen}\,v-z\,\mathrm{sen}\,u+$ $+a(\ln\mathrm{tg}(u/2))\,\mathrm{sen}\,u=0$.

580. $xa\,\mathrm{sen}\,v-ya\cos v+zu-auv=0$;

$$\frac{x-u\cos v}{a\,\mathrm{sen}\,v}=\frac{y-u\,\mathrm{sen}\,v}{-a\cos v}=\frac{z-av}{u}.$$

A lo largo de la línea $u=u_0$ las normales conservan un ángulo constante con el eje Oz. A lo largo de la línea $v=v_0$ las normales son paralelas al plano constante.

581. $12x+9y+20z-230=0$.

582. $x+y+z-3=0$.

586. Las coordenadas curvilíneas de los puntos se definen por las ecuaciones

$$\mathrm{tg}\,u=\pm C/\sqrt{A^2+B^2},\ \mathrm{tg}\,v=B/A.$$

593. $(R-r(s))\dot{r}(s)\ddot{r}(s)=0$.

El plano tangente es invariable a lo largo de la generatriz $s=s_0$; él coincide con el plano osculador de la línea $r=r(s)$ para $s=s_0$.

598. La ecuación del plano osculador se puede representar de la forma

$$f'(c)(x\,\mathrm{sen}\,c-y\cos c)-u\{ax\cos c+ay\,\mathrm{sen}\,c-z+f(c)\}=0,$$

de donde se deduce que todos los planos pasan por la recta

$$y=x\,\mathrm{tg}\,c,\quad ax\cos c+ay\,\mathrm{sen}\,c-z+f(c)=0.$$

599. Tomemos el punto de intersección de las normales como origen de los radios vectores. Entonces

$$r\cdot\partial_u r=0,\quad r\cdot\partial_v r=0,$$

de donde resulta que $r^2=\mathrm{const}$.

601. Si a es el vector director de la recta dada y el origen de los radios vectores se toma sobre esta recta, entonces los vectores r, a y $\partial_u r\times\partial_v r$ se encuentran en un mismo plano y

$$r\cdot(a\times(\partial_u r\times\partial_v r))=0.$$

Según la regla del producto vectorial doble obtenemos

$$(r\cdot\partial_u r)(a\cdot\partial_v r)-(r\cdot\partial_v r)(a\cdot\partial_u r)=0.$$

Pero esto se puede escribir de forma que el determinante funcional sea igual a cero

$$\partial_u r^2\partial_v(a\cdot r)-\partial_v r^2\,\partial_u(a\cdot r)=0.$$

De aquí resulta que entre las magnitudes r^2 y $a \cdot r$ existe la dependencia funcional

$$r^2 = f(a \cdot r).$$

Escogiendo el eje Oz a lo largo del vector a, obtenemos

$$x^2 + y^2 = f(z),$$

que es la superficie de rotación.

605. Sea

$$R = r(s) + ut(s)$$

la ecuación de una superficie; y $r(s)$ la arista de retroceso. Tenemos

$$\partial_s R = t + ukn, \quad \partial_u R = t.$$

El vector de la normal a la superficie

$$N = \partial_s R \times \partial_u R = uk(n \times t)$$

está orientado por la binormal a la línea $r(s)$ que es lo que era necesario demostrar.

606. NECESIDAD. Sea a el vector del plano director ortogonal. Entonces $e \cdot a = 0$. De aquí $e' \cdot a = 0$, $e'' \cdot a = 0$. Por consiguiente, $ee'e'' = 0$. Si e'' fuese igual a 0, entonces e' sería un vector constante. Pero $e \cdot e' = 0$ y $e \cdot a = 0$. Entonces e es constante y la superficie degenera en cilindro.

SUFICIENCIA. Sea $ee'e'' = 0$, $e'' \neq 0$. Entonces el vector $c = (e \times e')/|e'|$ es constante, ya que $c' = 0$. El vector e es ortogonal al vector constante c, o sea, es paralelo al plano constante.

607. El eje del helicoide.

608. La paralela mínima de la superficie.

609. La línea inicial.

610. $R = r + \dfrac{k}{k^2 + \varkappa^2}\, n$, donde k es curvatura de la línea inicial y $\varkappa$ su torsión.

611. Tomemos como directriz de la superficie oblicua

$$R = r(s) + ue(s)$$

la línea de garganta. Entonces $t \cdot e' = 0$. El vector de la normal a lo largo de la generatriz fija es $t_0 \times e_0 + u(e_0' \times e_0)$; por eso la ecuación de la superficie engendrada por las normales de la superficie inicial puede ser escrita en la forma

$$R = r_0 + ue_0 + v(t_0 \times e_0 + u(e_0' \times e_0)).$$

Los vectores e_0, $t_0 \times e_0$, $e_0' \times e_0$ son mutuamente ortogonales. Escogemos un sistema rectangular de coordenadas de modo que su origen se encuentre en el punto e_0 y las direcciones de los ejes de las coordenadas coincidan con los vectores indicados. Entonces las ecuaciones de la superficie obtenida serán

$$x = u, \quad y = av, \quad z = buv,$$

o bien

$$z = \frac{b}{a} xy.$$

Esto es un paraboloide hierbólico. Su vértice es el punto r_0, es decir, está sobre la línea de garganta.

612. Escribiendo las ecuaciones de la línea en forma paramétrica:

$$x = t/(t^2 - 1), \quad y = 1/(t^2 - 1), \quad z = t,$$

obtenemos

$$\Phi(t) = t^3 (t^2 - 2)/(t^2 - 1)^2.$$

613. La magnitud $\Phi(t)$ tiene un segundo orden de infinitud con respecto a t y, por consiguiente, el primer orden de tangencia.

615. Sea definida la línea por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t);$$

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} x(t) - x(t_0) & y(t) - y(t_0) & z(t) - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}$$

Representando las diferencias

$$x(t) - x(t_0), \quad y(t) - y(t_0), \quad z(t) - z(t_0)$$

por la fórmula de Taylor e igualando a cero en la expresión $\Phi(t)$ el coeficiente para $(t - t_0)^3$, obtenemos

$$\begin{vmatrix} x'''(t_0) & y'''(t_0) & z'''(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, la torsión de la línea es igual a cero.

617. $x^2 + y^2 = 1$, de un cilindro circular.

618. $xy + yz = 1$, de un cilindro hiperbólico.

619. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$, de un cono sin vértice.

620. Por ejemplo, $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, $C \neq 0$.

621. Por ejemplo, $(x - C)^2 + y^2 + z^2 = C^2$, $C \neq 0$.

622. La envolvente es el cilindro $y^2 + z^2 = 1$; las características son las circunferencias $y^2 + z^2 = 1$, $x - C = 0$; no existe una arista de retroceso.

623. Para las esferas construidas sobre las cuerdas paralelas al eje Oy

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

El elipsoide envuelve las esferas para las cuales $|\operatorname{tg} \varphi| \geqslant b/a$, donde φ es el parámetro de la elipse en las ecuaciones

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \operatorname{sen} \varphi.$$

Para las esferas construidas sobre las cuerdas paralelas al eje Ox

$$\frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{x^2 + z^2}{a^2} = 1, \quad |\operatorname{tg} \varphi| \leqslant \frac{b}{a}.$$

Para la hipérbola $x = a \operatorname{ch} \varphi$, $y = b \operatorname{sh} \varphi$ obtenemos:

a) si las cuerdas son paralelas al eje Oy, entonces para $b \geqslant a$ no hay una envolvente, para $b < a$ la envolvente se define por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Ella envuelve las esferas para las cuales $|\operatorname{tg} \varphi| \leqslant b/a$;

b) si las cuerdas son paralelas al eje Ox, entonces la ecuación de la envolvente para $b \neq a$ tiene la forma

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1.$$

Si $b > a$, ella envuelve todas las esferas, para $b < a$ envuelve las esferas para las cuales $|\operatorname{tg} \varphi| \leqslant b/a$. Si $b = a$ la envolvente es el plano $y = 0$ (compárese con los problemas 308, 309).

624. La hélice

$$x = b \cos \alpha, \quad y = b \operatorname{sen} \alpha, \quad z = b\alpha.$$

625. $xyz = \frac{2}{9} V$.

626. $x^2 + y^2 + (z - C)^2 = a^2C^2/(a^2 + 1)$.

INDICACIÓN. Las esferas son generadas por la rotación de las circunferencias tomadas en el plano xOz que tocan las rectas $x = \pm az$ y tienen los centros sobre el eje Oz.

627. La ecuación de la familia:

$$(R - \rho(s))^2 = a^2.$$

Derivando con respecto a s, obtenemos

$$(R - \rho)\cdot t = 0,$$

de donde

$$R - \rho = \lambda b + \mu n, \quad \lambda^2 + \mu^2 = a^2.$$

Haciendo

$$\lambda = a \cos \alpha, \quad \mu = a \operatorname{sen} \alpha,$$

obtenemos la ecuación del discriminante en la forma

$$R = \rho + a(b \cos \alpha + n \operatorname{sen} \alpha).$$

628. La ecuación de la familia es:

$$(x - b \cos \varphi)^2 + (y - b \operatorname{sen} \varphi)^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

La ecuación del discriminante:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

En el caso de $a > b$ la arista de retroceso se reduce a dos puntos $(0, 0, \pm\sqrt{a^2 - b^2})$, o a un punto $(0, 0, 0)$ si $a = b$.

629. La envolvente

$$[(y - R)^2 + z^2 - R^2][(y + R)^2 + z^2 - R^2] = 0$$

representa dos cilindros. No hay arista de retroceso (fig. 182).

630. El discriminante se define por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}(R - r(s))\cdot b(s) = 0,\\ (R - r(s))\cdot n(s) = 0.\end{array}\right\}$$

Las características son las tangentes a la línea dada, la arista de retroceso es la misma línea.

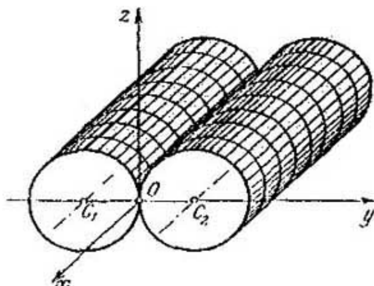


Fig. 182.

631. El discriminante se define por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r}(R - r(s))\cdot t(s) = 0,\\ (R - r(s))\cdot n(s)\, k(s) - 1 = 0.\end{array}\right\}$$

Las características son paralelas a las binormales y pasan por los centros de curvatura de la línea. La arista de retroceso

$$R = r + \frac{1}{k}\, n + \frac{1}{\varkappa}\,\frac{1}{k}\, b$$

se compone de los centros de las esferas osculatrices de la línea.

632. El discriminante se define por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r}(R - r(s))\cdot n(s) = 0,\\ (R - r(s))\cdot((\varkappa(s)\, b(s) - k(s)\, t(s) = 0.\end{array}\right\}$$

Las características están orientadas por los vectores de Darboux (véase el problema 477). La arista de retroceso

$$R = r + \frac{k\varkappa}{k\varkappa' - k'\varkappa}\, t + \frac{k^2}{k\varkappa' - k'\varkappa}\, b.$$

633. La ecuación del cono con eje Ox:

$$-x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + y^2 + z^2 = 0.$$

Damos una vuelta alrededor del eje Oy:

$$-(x \cos \alpha + z \operatorname{sen} \alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (-x \operatorname{sen} \alpha + z \cos \alpha)^2 + y^2 = 0,$$

o bien

$$y^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos 2\alpha - xz \operatorname{sen} 2\alpha = 0.$$

Hagamos girar este cono alrededor del eje Oz en un ángulo β (β es el parámetro de la familia):

$$(-x \operatorname{sen} \beta + y \cos \beta)^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos 2\alpha -$$
$$- z (x \cos \beta + y \operatorname{sen} \beta) \operatorname{sen} 2\alpha = 0. \qquad (*)$$

Derivando la igualdad (*) con respecto a β, obtenemos

$$(-x \operatorname{sen} \beta + y \cos \beta)(x \cos \alpha \cos \beta + y \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + z \operatorname{sen} \alpha) = 0.$$

El plano

$$x \cos \alpha \cos \beta + y \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + z \operatorname{sen} \alpha = 0$$

es perpendicular al eje del cono y tiene con éste sólo un punto común. Eliminando β de la ecuación

$$-x \operatorname{sen} \beta + y \cos \beta = 0$$

y de la ecuación de la familia (*), obtenemos la ecuación de la envolvente

$$z (z \cos 2\alpha - \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} 2\alpha) = 0.$$

Ahora bien, el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha = 0$ forman una superficie envolvente.

635. Examinemos una de las generatrices rectilíneas l de la superficie dada σ. En todos los puntos suyos el plano tangente π a σ será el mismo. Construyamos las tangentes a todas las líneas de sección σ por los planos paralelos en los puntos que están sobre la generatriz l. Es evidente que todas estas tangentes serán paralelas. Pero entonces las normales a estas secciones planas en todos los puntos de la generatriz l también serán paralelas y, en consecuencia, se encontrarán todas en un mismo plano π^*. Por consiguiente, la superficie sobre la cual están las evolutas de secciones planas es la envolvente de los planos π^*, o sea, es también desarrollable.

636. $z = a$, $z = -a$.

637. Tomemos sobre la superficie una línea arbitraria D y construyamos en cada punto suyo el plano tangente. Entonces la superficie se puede considerar como envolvente de estos planos, ya que según el enunciado del problema cada uno de ellos toca la superficie dada por la línea. Por otro lado, estos planos tangentes forman una familia con un parámetro (el arco s de la línea D). Por consiguiente, solamente una superficie desarrollable puede ser envolvente, o sea, las líneas de tangencia son rectas.

638. Sean $M_i (x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), los puntos dados. Tomemos la ecuación del plano en la forma normal:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Las distancias entre el punto M_i y el plano

$$d_i = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma - p.$$

Según el enunciado del problema

$$\cos\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \cos\beta \sum_{i=1}^{n} y_i + \cos\gamma \sum_{i=1}^{n} z_i - np = b = \text{const}.$$

Escribamos esta relación en la forma

$$\cos\alpha \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \cos\beta \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} + \cos\gamma \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} - p = \frac{b}{n}.$$

Esta condición expresa el hecho de que el punto con las coordenadas

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$$

se encuentra a una misma distancia a partir de todos los planos de la familia; por consiguiente, la envolvente es una esfera con el centro en este punto.

639. $ds^2 = (f'^2 + g'^2)\, du^2 + f^2\, dv^2$.
640. $ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u\, dv^2)$.
641. $ds^2 = (a^2 \operatorname{sen}^2 u + c^2 \cos^2 u)\, du^2 + a^2 \cos^2 u\, dv^2$.
642. $ds^2 = (a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u)\, du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 u\, dv^2$.
643. $ds^2 = (a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u)\, du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 u\, dv^2$.
644. $ds^2 = (1 + 4u^2)\, du^2 + u^2\, dv^2$.
645. $ds^2 = du^2 + R^2\, dv^2$.
646. $ds^2 = (1 + k^2)\, du^2 + u^2\, dv^2$.
647. $ds^2 = b^2\, du^2 + (a + b\cos u)^2\, dv^2$.
648. $ds^2 = \operatorname{ch}^2 (u/a)\, du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 (u/a)\, dv^2$.
649. $ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 u\, du^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 u\, dv^2$.
650. $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2$.
651. $ds^2 = [1 + f'^2 (u)]\, du^2 + 2af'(u)\, du\, dv + (a^2 + u^2)\, dv^2$.
652. a) Para la superficie $R = r(u) + vt(u)$ engendrada por las tangentes a la línea $r = r(u)$

$$ds^2 = (1 + k^2 v^2)\, du^2 + 2du\, dv + dv^2,$$

donde k es la curvatura de la línea inicial.

b) Para la superficie $R = r(u) + vn(u)$ engendrada por las normales principales,

$$ds^2 = [(1 - kv)^2 + \varkappa^2 v^2]\, du^2 + dv^2,$$

c) Para la superficie $R = r(u) + vb(u)$ engendrada por las binormales

$$ds^2 = (1 + \varkappa^2 v^2)\, du^2 + dv^2,$$

donde $\varkappa$ es la torsión de la línea $r = r(u)$.

653. $ds^2 = (1 + p^2)\, dx^2 + 2pq\, dx\, dy + (1 + q^2)\, dy^2$, donde $p = \partial_x z$, $q = \partial_y z$.
654. En los casos de a), b), d).

655.

$$E' = \frac{1}{J^2}[E(\partial_v v')^2 - 2F\partial_u v'\partial_v v' + G(\partial_v v')^2],$$

$$G' = \frac{1}{J^2}[E(\partial_u u')^2 - 2F\partial_u u'\partial_v u' + G(\partial_u u')^2],$$

$$F' = \frac{1}{J^2}[-E\partial_v u'\partial_v v' + F(\partial_u u'\partial_v v' + \partial_v u'\partial_u v') - G\partial_u u'\partial_u v'],$$

$$H' = \frac{H}{|J|},$$

donde

$$J = \frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0.$$

658. Las coordenadas curvilíneas expresan las longitudes de los arcos de las líneas de coordenadas, la red de coordenadas es de Chébishev.

659. De la esfera: $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + R^2\cos^2(\widetilde{u}/R)\,d\widetilde{v}^2$.

Del toro: $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + (a + b\cos(\widetilde{u}/b))^2\,d\widetilde{v}^2$.

Del catenoide: $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + (a^2 + \widetilde{u}^2)\,d\widetilde{v}^2$.

De la seudoesfera: $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + e^{-2\widetilde{u}/a}\,d\widetilde{v}^2$.

INDICACIÓN. $\widetilde{u}$ es el parámetro natural del meridiano.

660. $ds^2 = d\widetilde{u}^2 + e^{-2\widetilde{u}/a}\,d\widetilde{v}^2$. Suponiendo que $\overset{*}{u} = \widetilde{v}$, $\overset{*}{v} = ae^{\widetilde{u}/a}$, obtenemos

$$ds^2 = \frac{a^2}{\overset{*}{v}{}^2}(d\overset{*}{u}{}^2 + d\overset{*}{v}{}^2).$$

661. $\cos\varphi = \dfrac{a^2xy}{\sqrt{1+a^2x^2}\sqrt{1+a^2y^2}}$.

663. Tomemos la primera forma cuadrática en el aspecto

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2.$$

Entonces

$$\cos\alpha = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G(u)\,dv^2}},$$

de donde

$$v\operatorname{ctg}\alpha = \pm\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{G(u)}}.$$

664. Tomando la primera forma cuadrática de la esfera en el aspecto

$$ds^2 = du^2 + R^2 \cos^2 (u/R)\, dv^2,$$

obtenemos

$$v \operatorname{ctg} \alpha = \pm \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R} \right).$$

666. Escribiendo la ecuación del cono en la forma $r = ve(u)$, $|e(u)| = 1$, obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha \ln v = \int |e'(u)|\, du + C.$$

667. Si la ecuación de la superficie se toma en la forma indicada en el problema 652, obtenemos $u + v = \text{const}$.

668. Escribiendo la primera forma cuadrática de la superficie S del modo

$$ds^2 = (1 + k^2v^2)\, du^2 + 2du\, dv + dv^2,$$

obtenemos

$$(\operatorname{sen}^2 \alpha - k^2v^2 \cos^2 \alpha)\, du^2 + 2\operatorname{sen}^2 \alpha\, du\, dv + \operatorname{sen}^2 \alpha\, dv^2 = 0.$$

669. $(E\partial_v\varphi - F\partial_u\varphi)\, du + (F\partial_v\varphi - G\partial_u\varphi)\, dv = 0$.

670. $v - \operatorname{tg} u = \text{const}$.

671. $u^2 + u + 1 = C_1e^{-v}$ $(C_1 = \text{const})$.

672. $v = \dfrac{1}{2u^2} + \lambda$.

673. $X = \dfrac{U - V}{2} \cos V,\quad Y = \dfrac{U - V}{2} \operatorname{sen} V,\quad Z = \dfrac{U + V}{2},$

donde $U = 2u + v$, $V = v$.

674. $ER - FQ + GP = 0$.

676. $(1 + a^2x^2)\, y^2 = C_1,\ (1 + a^2y^2)\, x^2 = C_2$.

678. $\ln (u + \sqrt{u^2 + a^2}) \pm v = \text{const}$.

679. $u \pm \ln \operatorname{tg} (v/2) = \text{const}$.

680. $$\left.\begin{aligned} ay + \sqrt{1 + a^2y^2} &= C\,(ax + \sqrt{1 + a^2x^2}),\\ z &= axy \end{aligned}\right\}$$

y

$$\left.\begin{aligned} ay + \sqrt{1 + a^2y^2} &= \frac{C_1}{\sqrt{1 + a^2x^2} + ax},\\ z &= axy. \end{aligned}\right\}$$

681. a) $ds^2 = (8u^2 + v^2)\, du^2 + 2uv\, du\, dv + (8v^2 + u^2)\, dv^2$;

b) $ds = 2\sqrt{2v^2 + 1}\, dv,\ ds = \sqrt{8u^2 + 1}\, du$.

$ds = 2\sqrt{2a^4 + a^2 + 2u}\, du;$

c) $s = 3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}$.

682. $\cos\alpha = \pm(1-a^2)/(1+a^2)$.

683. $p = \frac{10}{3}a$; $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

684. $s = |\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|$. 685. $\cos\alpha = -3/5$.

686. $\cos\alpha = 2/3$. 687. $s = \sqrt{2}\,|u_2 - u_1|$.

688. $ds^2 = a^2\operatorname{ctg}^2 u\, du^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 u \frac{du^2}{\operatorname{sen}^2 u} = \frac{a^2\, du^2}{\operatorname{sen}^2 u}$,

$$s = a\left|\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\operatorname{sen} u}\right| = a\left|\ln\operatorname{tg}\frac{u_2}{2} - \ln\operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\right| = a|v_2 - v_1|.$$

Examinemos la familia

$$v = a\ln\operatorname{tg}(u/2) + C.$$

El punto $M_1(u_1, v_1)$ pertenece a la línea

$$v = -a\ln\operatorname{tg}(u/2) + C_1,$$

y el punto $M_2(u_2, v_2)$ descansa sobre la línea

$$v = -a\ln\operatorname{tg}(u/2) + C_2,$$

o sea,

$v_1 = -a\ln\operatorname{tg}(u_1/2) + C_1$, $v_1 = a\ln\operatorname{tg}(u_1/1) + C$,
$v_2 = -a\ln\operatorname{tg}(u_2/2) + C_2$, $v_2 = a\ln\operatorname{tg}(u_2/2) + C$;

pues

$$v_1 = \frac{C_1 + C}{2}, \quad v_2 = \frac{C_2 + C}{2};$$

por eso

$$s = a|v_1 - v_2| = \frac{a|C_2 - C_1|}{2},$$

es decir, no depende de C.

689. a) Tomemos las ecuaciones de la esfera en la forma

$x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u \operatorname{sen} v$, $z = R\operatorname{sen} u$.

Pongamos uno de los catetos sobre la línea $u = 0$ y el segundo, sobre la línea $v = \alpha$; pongamos uno de los vértices en el punto B $(u = 0, v = 0)$, y el segundo, en el punto A $(u = \beta, v = \alpha)$ (fig. 183). Entonces las longitudes de los catetos resultan $a = R\alpha$, $b = R\beta$, respectivamente. Para calcular c es necesario hallar la longitud del arco de la línea

$$Ay + Bz = 0$$

(sobre la superficie de la esfera) entre los puntos indicados. La ecuación de la hipotenusa en coordenadas curvilíneas es: $A\cos u\operatorname{sen} v + B\operatorname{sen} u = 0$. Puesto que ella pasa por el punto $(u = \beta, v = \alpha)$, entonces

$$\operatorname{sen} v = k\operatorname{tg} u,$$

dondo

$$k=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

$$c=s=R\sqrt{1+k^2}\int_0^{\beta}\frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-(1+k^2)\operatorname{sen}^2 u}}=$$

$$=R\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1+k^2}\operatorname{sen}\beta\right)=R\operatorname{arcsen}\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

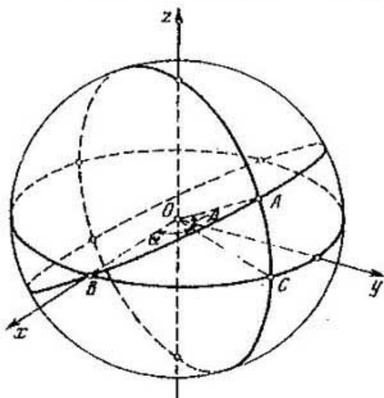


Fig. 183.

de dondo

$$\cos(c/R)=\cos\alpha\cos\beta=\cos(a/R)\cos(b/R).$$

b) $$S=R^2\iint_D\cos u\,du\,dv=R^2\int_0^{\alpha}dv\int_0^{f(v)}\cos u\,du,$$

de dondo

$$f(v)=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}v}{k},$$

$$S=R^2\int_0^{\alpha}\operatorname{sen}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}v}{k}\,dv=R^2\int_0^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}v\,dv}{\sqrt{(1+k^2)\cos^2 v}}=$$

$$=R^2\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

De aquí

$$\operatorname{sen}\frac{S}{R^2}=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+k^2}-k\cos\alpha}{1+k^2}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(a/R)\operatorname{sen}(c/R)}{1+\cos(c/R)}.$$

Valiéndonos de la relación

$$\cos B=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma},$$

obtenemos

$$\operatorname{sen}B=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma},$$

$$\cos(A+B)=-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\gamma},$$

$$\operatorname{sen}\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\gamma}.$$

Comparando con lo antecedente, hallamos

$$S=R^2\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right).$$

690. $S=\frac{a^2}{2}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

691. $S=a^2\left[\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$.

692. $S=2a^2(\pi-2)$, donde a es el radio de la esfera.

693. $S=2\varphi_0R^2$, donde R es el radio de la esfera.

695. INDICACIÓN. Tómese la ecuación de la superficie cónica en la forma $r=ve(u)$, donde $|e(u)|=1$, y compárese su primera forma cuadrática con la primera forma cuadrática del plano en coordenadas polares.

696. Según se muestra en el problema 652, la primera forma cuadrática de tal superficie puede ser escrita del modo

$$ds^2=[1+v^2k^2(u)]\cdot du^2+2du\,dv+dv^2,$$

donde $k(u)$ es la curvatura de la línea l.

Vamos a deformar la línea l sin estiramiento de modo que en cada punto suyo se conserve la curvatura. Como en la expresión ds^2 no entra la torsión de la línea, entonces la deformación correspondiente de la superficie engendrada por las tangentes a la línea l será la superposición de la superficie inicial sobre la deformada. Una vez que l se ha convertido en una línea plana, superponemos la superficie de las tangentes sobre el plano.

697. La primera forma cuadrática del helicoide directo

$$x=u\cos v,\quad y=u\operatorname{sen}v,\quad z=av$$

tiene el aspecto

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

Supongamos que el catenoide está engendrado por la rotación de la catenaria

$$x = a \operatorname{ch} (z/a), \quad y = 0$$

alrededor del eje Oz. Las ecuaciones paramétricas de la catenaria se pueden representar en la forma

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}, \quad y = 0, \quad z = a \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{c},$$

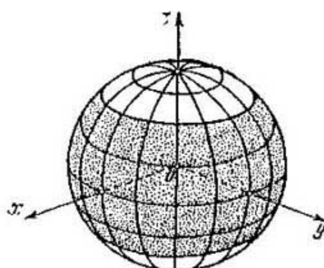


Fig. 184.

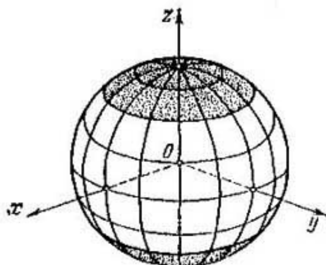


Fig. 185.

lo que se puede verificar por comprobación directa. Entonces las ecuaciones paramétricas del catenoide serán

$$x = \sqrt{u^2 + a^2} \cos v,$$

$$y = \sqrt{u^2 + a^2} \operatorname{sen} v,$$

$$z = a \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}.$$

Calculando ahora la primera forma cuadrática del catenoide, obtenemos (*).

701, 702. Una esfera.
703. Una semiesfera sin circunferencia de frontera.
704. Una zona esférica sin cicrunferencias de frontera (fig. 184).
705. Dos segmentos esféricos sin fronteras (fig. 185).
706. Un círculo máximo.
707. Una mitad del círculo máximo sin extremos.
708. Dos arcos simétricos del círculo máximo.
709. Dos paralelas (si la normal se orienta fuera del cono).
710. Una esfera sin dos puntos diametralmente opuestos.
711. Una esfera con el círculo máximo excluido.

712. Una esfera tomada dos veces; si el eje del toro se representa verticalmente, entonces las paralelas superior e inferior del mismo se aplican a los polos de la esfera.

713. Un cuarto del círculo máximo tomado dos veces sin un extremo.

714. Una semiesfera sin polo, tomada un número infinito de veces.

716. $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{f^{2'} + g^{2'}}} [(f'g'' - f''g') du^2 + fg' dv^2]$.

717. $\varphi_2 = R (du^2 + \cos^2 u dv^2)$.

718. $\varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}} (du^2 + \cos^2 u \, dv^2)$.

719. $\varphi_2 = \frac{-ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u}} (du^2 - \operatorname{ch}^2 u \, dv^2)$.

720. $\varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}} (du^2 + \operatorname{sh}^2 u \, dv^2)$.

721. $\varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2}} (du^2 + u^2 dv^2)$.

722. $\varphi_2 = R \, dv^2$.

723. $\varphi_2 = \frac{ku}{\sqrt{1 + k^2}} \, dv^2$.

724. $\varphi_2 = b \, du^2 + \cos u \, (a + b \cos u) \, dv^2$.

725. $\varphi_2 = -\frac{1}{a} (du^2 - a^2 dv^2)$.

726. $\varphi_2 = -a \operatorname{ctg} u \, (du^2 - \operatorname{sen}^2 u \, dv^2)$.

727. $\varphi_2 = -\frac{2a \, du \, dv}{\sqrt{u^2 + a^2}}$.

729. $\varphi_2 = \frac{\partial_{xx} f \, dx^2 + 2\partial_{xy} f \, dx \, dy + \partial_{yy} f \, dy^2}{\sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}}$.

Del enunciado del problema

$$\partial_{xx} f = 0, \quad \partial_{xy} f = 0, \quad \partial_{yy} f = 0.$$

La solución general de este sistema es:

$$f = ax + by + c.$$

730. $\varphi_2 = -\frac{a}{u^2 + a^2} du^2 + a \, dv^2$,

$$k_{n|k=\text{const}} = -a/(u^2 + a^2), \; k_{n|u=\text{const}} = a/(u^2 + a^2).$$

731. Si la ecuación de la superficie se toma en la forma indicada en el problema 554, entonces

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \varkappa/vk,$$

donde k y $\varkappa$ son, respectivamente, la curvatura y la torsión de la línea dada.

732. $k_1 = a/b^2$, $k_2 = a/c^2$.

733. $\frac{du}{dv} = \pm\sqrt{u^2+a^2}$; $k_1 = -k_2 = \frac{a}{u^2+a^2}$.

735. $k_1 = \sqrt{3}/9, \quad k_2 = -\sqrt{3}/3.$

736. $k_1 = 1/p, \quad k_2 = 1/q,$

738. a) $k_n = \frac{-du^2}{\sqrt{1+u^2}\,[(1+u)^2\,du^2+dv^2]}$, donde $u = x$, $v = z$;

b) $k_n = -1/(1+u_2)^{3/2}$;

c) $k_n = -1/21\sqrt{5}$.

739. a) $k_1 = 1/2\sqrt{5}$, $k_2 = 0$;

b) $x-2=0$, $z-1=0$; $\frac{x-2}{4} = \frac{z-1}{2}$, $y = 0$;

c) $k = 2/9\sqrt{5}$.

740. a) $4x^2 + 9y^2 = 1$;

b) $R = 2/13$.

741. INDICACIÓN. Escribamos la fórmula de Euler en la forma

$$\frac{1}{r_i} = \frac{R_1+R_2}{2R_1R_2} - \frac{R_1-R_2}{2R_1R_2}\cos 2\left(\varphi + \frac{i-1}{n}\pi\right),$$

donde $1/R_1$, $1/R_2$ son las curvaturas principales, $i = 1, 2, \ldots, n$.

742. Una esfera.

744. Superficies desarrollables.

746. 1) Para la superficie engendrada por la rotación de la línea $x = f(u)$, $y = 0$, $z = g(u)$ alrededor del eje Oz,

$$K = \frac{g'(f'g'' - f''g')}{f(f'^2+g'^2)^2}.$$

2) Para la esfera $K = 1/R^2$.

3) Para el elipsoide de rotación

$$K = -\frac{c^2}{(a^2\cos^2 u + c^2\operatorname{sen}^2 u)^2}.$$

4) Para el hiperboloide de rotación de una hoja

$$K = -\frac{c^2}{(a^2\operatorname{sh}^2 u + c^2\operatorname{ch}^2 u)^2},$$

5) Para el hiperboloide de rotación de dos hojas

$$K=\frac{c^2}{(a^2\operatorname{ch}^2 u+c^2\operatorname{sh}^2 u)^2}.$$

6) Para el paraboloide de rotación

$$K=\frac{4}{(1+4u^2)^2}.$$

7) Para el cilindro circular

$$K=0.$$

8) Para el cono circular

$$K=0.$$

9) Para el toro

$$K=\frac{\cos u}{b(a+b\cos u)}.$$

10) Para el catenoide

$$K=-\frac{1}{a^2\operatorname{ch}^4(u/a)}.$$

11) Para la seudoesfera

$$K=-\frac{1}{a^2}.$$

747. Uno de los radios principales de curvatura de la superficie es igual al radio de curvatura de la parábola $y^2=2px$:

$$R_1^2=p^2\left(1+\frac{2x}{p}\right)^3.$$

El segundo radio principal de curvatura es igual al segmento que va de la normal de la parábola a la directriz:

$$R_2^2=\frac{p^2}{4}\left(1+\frac{2x}{p}\right)^2.$$

De este modo, $|R_1|=2|R_2|$.

748. $K=-\frac{1}{A^2}(\partial_{uu}\ln A+\partial_{vv}\ln A)$ (véase el problema 660).

749. $K=-\frac{\partial_{uu}\sqrt{G}}{\sqrt{G}}$. 750. $K=-1$.

751. $K^{-1}=pq\left(1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)^2$.

753.

$$K=\frac{-1}{(\partial_xF)^2+(\partial_yF)^2+(\partial_zF)^2}\begin{vmatrix}\partial_{xx}F & \partial_{xy}F & \partial_{xz}F & \partial_xF\\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F & \partial_{yz}F & \partial_yF\\ \partial_{zx}F & \partial_{zy}F & \partial_{zz}F & \partial_zF\\ \partial_xF & \partial_yF & \partial_zF & 0\end{vmatrix}.$$

754. $K = 4c$.

755. Si la superficie de las normales principales está definida por la ecuación

$$\rho = r(s) + vn(s),$$

entonces

$$K = -\frac{\varkappa^2}{[(1-vk)^2+v^2\varkappa^2]^2},$$

donde k y $\varkappa$ son, respectivamente, la curvatura y la torsión de la línea $r = r(s)$.

Si la superficie de las binormales está definida por la ecuación

$$\rho = r(s) + vb(s),$$

entonces

$$K = -\frac{\varkappa^2}{(1+v^2\varkappa^2)^2},$$

donde $\varkappa$ es la torsión de la línea $r = r(s)$.

756. $H = 0$, $K = -a^2/(a^2+u^2)^2$, la curvatura total es constante sobre las hélices.

757. $$K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \qquad H = \frac{(1+p^2)\,t+(1+q^2)\,r-2pqs}{2\,(1+p^2+q^2)^{3/2}}$$

donde $p = \partial_x z$, $q = \partial_y z$, $r = \partial_{xx} z$, $s = \partial_{xy} z$, $t = \partial_{yy} z$.

758.

$$K = \frac{f'f''}{\rho\,(1+f'^2)^2}, \quad H = \frac{f''}{2\,(1+f'^2)^{3/2}} + \frac{f'}{2\rho\sqrt{1+f'^2}},$$

759. $H = -1/2a$.

761. Si el ojo del toro es vertical, entonces las paralelas superior e inferior del mismo se componen de puntos parabólicos; estas paralelas separan la parte exterior del toro, constituida por puntos elípticos, de su parte interior compuesta por puntos hiperbólicos.

762. Todos los puntos de la superficie son elípticos (fig. 186).

763. Los vértices de la sinusoide describen líneas compuestas de puntos parabólicos; los puntos de inflexión de la sinusoide describen líneas que no pertenecen a la superficie. Ambas familias de líneas indicadas dividen toda la superficie en zonas, con curvatura total de igual signo, dos zonas contiguas (por arriba o por abajo) tienen curvaturas de signos diferentes (fig. 187).

764. El punto $x = 1$, $y = z = 0$ es singular y divide la superficie en dos partes: para $x > 1$ los puntos de superficie son elípticos y para $x < 1$, son hiperbólicos (fig. 188).

765. Todos los puntos de la superficie son hiperbólicos (fig. 189).

766. Si el producto $AB \gg 0$, entonces todos los puntos de la superficie son hiperbólicos (fig. 190); si $AB < 0$, sobre la superficie pueden tenerse puntos de los tres tipos (fig. 191).

767. Elípticos. 768. Hiperbólicos.

769, 770. Elípticos.

771. Hiperbólicos.

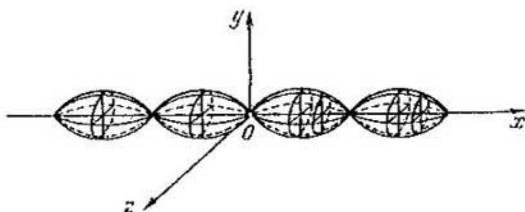


Fig. 186.

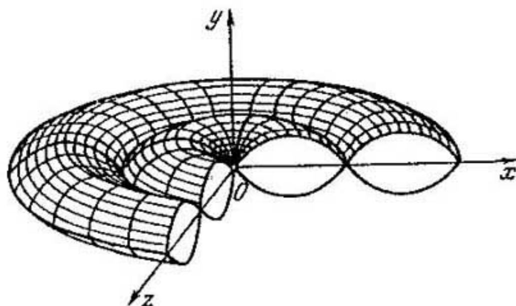


Fig. 187.

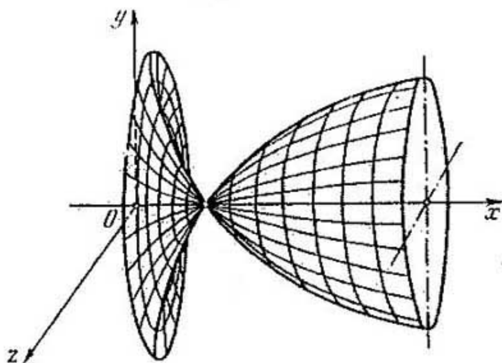


Fig. 188.

772-775. Parabólicos.
776. Si $f'f'' < 0$, los puntos son elípticos si $f'f'' > 0$, son hiperbólicos si $f'f'' = 0$, son parabólicos.

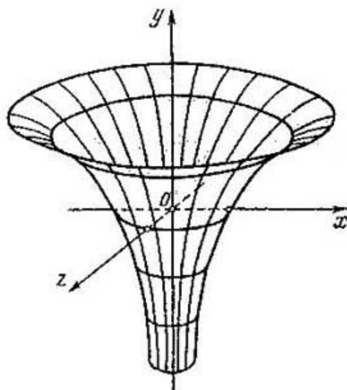


Fig. 189.

778. La necesidad es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea

$$L = \lambda E, \quad M = \lambda F, \quad N = \lambda G.$$

Sustituimos los valores de los coeficientesde las formas cuadráticas:

$$-\partial_u m \cdot \partial_u r = \lambda \partial_u r^2, \quad -\partial_u m \cdot \partial_v r = \lambda \partial_u r \cdot \partial_v r,$$

o bien

$$(m_u + \lambda r_u) \cdot r_u = 0, \quad (m_u + \lambda r_u) \cdot r_v = 0.$$

Adjuntando aquí la igualdad

$$(m_u + \lambda r_u) \cdot m = 0,$$

obtenemos

$$m_u + \lambda r_u = 0.$$

De un modo análogo se demuestra la igualdad a cero del vector $m_v + \lambda r_v$. Así,

$$m_u = -\lambda r_u, \quad m_v = -\lambda r_v. \qquad (*)$$

Derivando la primera ecuación con respecto a v y la segunda con respecto a u, obtenemos

$$m_{uv} = -\lambda_v r_u - \lambda r_{uv}, \quad m_{vu} = -\lambda_u r_v - \lambda r_{vu},$$

de donde

$$\lambda_v r_u - \lambda_u r_v = 0.$$

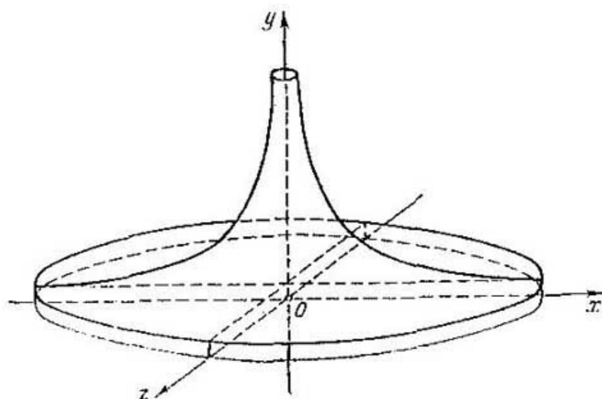


Fig. 190.

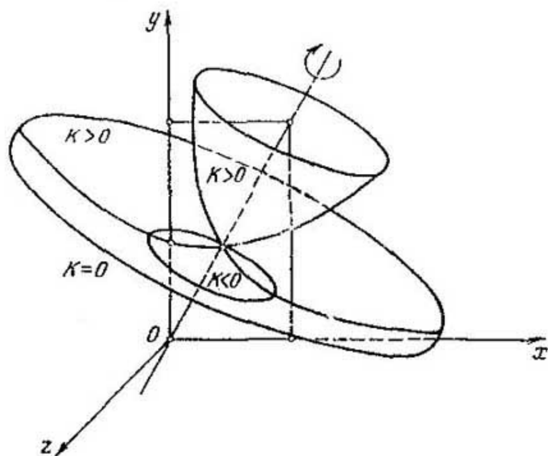


Fig. 191.

Si por lo menos una de las magnitudes $\lambda_u\lambda_v$, fuese distinta de cero, los vectores r_u y r_v resultarían colineales lo que es imposible. Excluyendo este caso, obtenemos $\lambda =$ const. Integramos las ecuaciones (*):

$$r = -\frac{m}{\lambda} + r_0, \quad \text{o bien } (r - r_0)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

(una esfera).

780. Construimos la evoluta de cualquier meridiano y hallamos los puntos $P_1, P_2, \ldots$, de su encuentro con el eje de rotación. Sean $M_1, M_2, \ldots$ los puntos de la evolvente (del meridiano) que les corresponden. Entonces las paralelas que pasan por estos puntos se componen de puntos de redondeo.

781. Las paralelas descritas por los vértices de la sinusoide y solamente ellas (véanse los problemas 780 y 389).

782. Dos puntos, o sea, los puntos de encuentro del elipsoide con el eje de rotación.

783. El vértice del paraboloide.

784. En el paraboloide

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > q > 0,$$

hay dos puntos de redondeo:

$$A_{1,2}\,(0, \pm\sqrt{pq - q^2}, \ (p-q)/2).$$

785. En el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0,$$

hay cuatro puntos de redondeo:

$$A_{1-4}\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},\ 0,\ \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\right).$$

786. En el hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > b > 0,$$

hay cuatro puntos de redondeo

$$A_{1-4}\left(0, \pm b\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}},\ \pm c\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}}\right).$$

789. Por ejemplo, la superficie engendrada por la rotación de la parábola $y = x^4$ alrededor del eje Oy.

790. Por ejemplo, sobre el cilindro $y = x^4$ el eje Oz se compone de puntos de aplanamiento.

791. Válgase del problema 729.

792. $M\,du + N\,dv = 0,\ L\,du + M\,dv = 0.$

793. $LR - MQ + NP = 0.$

795. $\left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v} - M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(M\frac{\partial\varphi}{\partial v} - N\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0.$

797. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=C_1$.

798. $b\,(1,\ 0,\ -1)$.

799. $(LB-MA)\,du+(MB-NA)\,dv=0$.

801. $v=\operatorname{arctg} u+C$.

804. Al tomar las ecuaciones de la seudoesfera en la forma $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = a \ln \operatorname{tg}(u/2) + a \cos u$, obtenemos

$$\ln \operatorname{tg}(u/2) \pm v = C.$$

Si se introducen los parámetros nuevos

$$u' = \ln \operatorname{tg}(u/2) + v,$$

$$v' = \ln \operatorname{tg}(u/2) - v,$$

entonces la red de coordenadas será asintótica y los coeficientes de la primera forma cuadrática cumplirán los requisitos del problema 657.

806. Si partimos de las ecuaciones

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\operatorname{sen} v, \quad z = \varphi(u)$$

de la superficie de rotación, obtenemos

$$(f'\varphi'' - f''\varphi')\,du^2 + f\varphi'\,dv^2 = 0.$$

807. $u \pm v = \text{const}$.

808. Si se toma la ecuación del toro en la forma

$$x = (a + b\cos u)\cos v, \quad y = (a + b\cos u)\operatorname{sen} v,$$
$$z = b \operatorname{sen} u,$$

entonces la ecuación diferencial de las líneas asintóticas será

$$b\,du^2 + \cos u\,(a + b\cos u)\,dv^2 = 0.$$

Tiene la solución general

$$v + C = \pm \int \frac{\sqrt{b}\,du}{\sqrt{-\cos u\,(a + b\cos u)}}$$

para $\pi/2 < u < 3\pi/2$.

Es evidente que las líneas $u = \pi/2$, $u = 3\pi/2$ son también las soluciones de la ecuación diferencial (sus soluciones singulares). Envuelven las familias de las líneas asintóticas situadas sobre la parte interior de la superficie del toro (fig. 192).

809. Las generatrices rectilíneas y sus trayectorias ortogonales, o sea, las hélices.

810. Las generatrices rectilíneas.

811. La ecuación de la superficie tiene la forma $x^3z - y^3 = 0$. La ecuación diferencial de las líneas asintóticas es:

$$2y^2\,dx^2 - 3xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2 = 0,$$

o bien

$$(x\,dy - y\,dx)(2y\,dx - x\,dy) = 0.$$

Por consiguiente, existen dos familias de líneas asintóticas:
1) $y = c_1 x$, $z = c_1^3$;
2) $y = c_2 x^3$, $z = c_2^3 x^3$.
814. Si $k_1 + k_2 = 0$, entonces de la fórmula de Euler resulta que

$$\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi = 0,$$

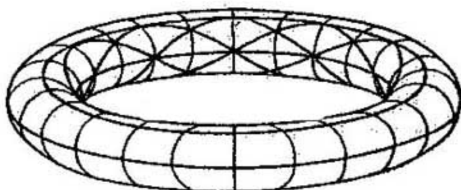


Fig. 102.

donde φ es el ángulo formado por las direcciones asintótica y principal. De aquí se deduce que $\varphi = \pm\pi/4$, es decir, entre las direcciones asintóticas el ángulo es igual a $\pi/2$.

817. Tomemos la red de las líneas asintóticas de la superficie dada como red de coordenadas. Entonces $L = 0$, $N = 0$. Para que la red correspondiente sobre la superficie paralela también se componga de líneas asintóticas debe cumplirse la condición $L^* = 0$, $N^* = 0$. Puesto que

$$L^* = aKE + (1 - 2aH)\, L,$$

$$N^* = aKG + (1 - 2aH)\, N,$$

entonces para $K \neq 0$ los coeficientes L^*, N^* no son iguales a cero, que es lo que demuestra lo exigido en el problema.

820. Las generatrices rectilíneas y sus trayectorias ortogonales, que son secciones planas.

821. Las generatrices rectilíneas y las líneas de intersección de esferas de radio arbitrario con centro en el vértice de la superficie cónica, con la superficie cónica.

822. Los paralelos y meridianos.

823. Las líneas de coordenadas.

824. Las generatrices rectilíneas y sus trayectorias ortogonales.

825. Si la ecuación del helicoide se toma en la forma

$$x = u\cos v, \quad y = u\operatorname{sen} v, \quad z = av,$$

entonces la ecuación diferencial de las líneas de curvatura es

$$(a^2 + u^2)\, dv^2 - du^2 = 0,$$

de donde

$$v = \pm \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c.$$

826.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\\ &\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{qC}=\frac{q-p}{1+C}\ (C\neq 0), \end{aligned}\right\}$$

así como las secciones del paraboloide elíptico por los planos $x=0$ e $y=0$.

831. $R=r(s)+R_1m(s)$, donde $k_1=1/R_1$ es la curvatura principal a lo largo de la línea dada. Así, pues, la envolvente de las normales de la superficie a lo largo de la línea de curvatura se compone de los centros de la curvatura principal. Su plano osculador coincide con el plano de la sección normal de la línea de curvatura en el punto correspondiente.

834. Tomemos la red ortogonal sobre la superficie dada como red de coordenadas. Entonces $F=0$. Para la red ortogonal correspondiente sobre la superficie paralela debe ser $F^*=0$.

Tomemos las ecuaciones de las superficies en examen en la forma

$$r=r(u,\ v)\quad \text{y}\quad r=r(u,\ v)+am(u,\ v).$$

Entonces

$$F^*=2a(aH-1)M,$$

de donde resulta que $F^*=0$ en dos casos: a) $M=0$; entonces la red ortogonal sobre la superficie dada está constituida por las líneas de curvatura; b) $a=1/H$; entonces la superficie dada tiene una curvatura media constante y a cualquier red ortogonal sobre la misma le corresponderá también una red ortogonal.

835. Esto es posible solamente para un elipsoide de rotación.

845. Supongamos que las generatrices rectilíneas son paralelas al eje Oz. Entonces la ecuación de la superficie se puede tomar en la forma

$$r=f(u)\,i+\varphi(u)\,j+vk,$$

donde u la consideramos como parámetro natural de la línea directriz. Buscaremos la ecuación de la geodésica en la forma

$$v=v(u). \qquad (*)$$

Entonces

$$N=r_u\times r_v=\varphi' i-f' j,\qquad dr=(f' i+\varphi' j+v' k)\,du,$$

$$d^2r=(f'' i+\varphi'' j+v'' k)\,du^2$$

y la ecuación para determinar las líneas geodésicas será

$$\begin{vmatrix} \varphi' & -f' & 0\\ f' & \varphi' & v'\\ f'' & \varphi'' & v'' \end{vmatrix}=0,$$

o bien

$$(\varphi'^2+f'^2)\,v''-(\varphi'\varphi''+f'f'')\,v'=0.$$

Pero $\varphi'^2 + f'^2 = 1$; por lo tanto

$$\varphi'\varphi'' + f'f'' = \frac{1}{2}(\varphi'^2 + f'^2)' = 0.$$

Ahora bien, $v'' = 0$; por lo tanto, $v = c_1 u + c_2$. La ecuación vectorial de la familia de líneas geodésicas será

$$r = f(u)\, i + \varphi(u)\, j + (c_1 u + c_2)\, k,$$

de donde

$$\cos\theta = \cos(\widehat{r_u, OZ}) = \frac{\dfrac{dr}{du}\cdot k}{\left|\dfrac{dr}{du}\right|} = \frac{c_1}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + c_1^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}.$$

Por consiguiente, las geodésicas halladas son hélices generalizadas.

Además, las geodésicas son las generatrices rectilíneas. Estas han quedado fuera de la solución general, ya que sus ecuaciones no se pueden representar en la forma (*).

Como por cada punto de la superficie cilíndrica pasa bien una hélice generalizada, o bien una generatriz rectilínea, entonces cada una de estas líneas es geodésica.

848. Los círculos máximos de la esfera.

852. Véanse los problemas 477, 632, 851.

856. $k_g = \dfrac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$. 857. $k_g = \dfrac{|u|}{u^2 + a^2}$.

858. $k_g|_{u=c} = \dfrac{|u|}{u^2 + f'^2(v)}$, $k_g|_{v=c} = 0$.

863. Tomemos las ecuaciones del helicoide directo en la forma

$$x = u\cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \; z = av.$$

Observemos, ante todo, que las líneas geodésicas son generatrices rectilíneas, o sea, las líneas $v =$ const. Suponiendo ahora que $dv \neq 0$, obtenemos la ecuación diferencial de las líneas geodésicas

$$\frac{d^2u}{dv^2} - \frac{2u}{a^2 + u^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - u = 0.$$

Para resolver la ecuación introduzcamos nuevas variables suponiendo que u es una variable independiente y $p = \dfrac{du}{dv}$ es función de u. Entonces la ecuación tomará la forma

$$p\frac{dp}{du} - \frac{2u}{a^2 + u^2}p^2 - u = 0.$$

Suponiendo que $z = p^2$, obtenemos

$$\frac{dz}{du} - \frac{4u}{a^2 + u^2}z - 2u = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$z=(a^2+u^2)^2\left(C_1-\frac{1}{a^2+u^2}\right),$$

de donde

$$v=\int\frac{du}{(a^2+u^2)\sqrt{C_1-\frac{1}{a^2+u^2}}}+C_2.$$

864. Tomemos la primera forma cuadrática de la seudoesfera en el aspecto

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

(véase el problema 660). Entonces las ecuaciones diferenciales de las geodésicas serán

$$\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=0,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{2}{y}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds}=0.$$

A este sistema lo satisfacen las líneas $x=\text{const}$.
Si $x\neq\text{const}$, este sistema se puede sustituir por la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{y}=0$$

cuya solución general es

$$(x-C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

865. INDICACIÓN. Considerando a lo largo de la geodésica v como función de u, obtenemos la ecuación diferencial de las líneas geodésicas de la superficie de Liouville

$$2(f+\varphi)\frac{d^2v}{du^2}=-\frac{df}{du}\left(\frac{dv}{du}\right)^3+\frac{d\varphi}{d}\left(\frac{dv}{du}\right)^2-\frac{df}{du}\frac{dv}{du}+\frac{d\varphi}{dv},$$

o bien

$$(f+\varphi)\,du^2d\,(dv^2)=(du^2+dv^2)\,(d\varphi\,du^2-df\,dv^2),$$

de donde

$$d\left(\frac{\varphi\,du^2-f\,dv^2}{du^2+dv^2}\right)=0.$$

Integrando esta relación, obtenemos las ecuaciones buscadas.

866. INDICACIÓN. Comprobar primeramente que

$$\rho\cos\mu=ert,$$

donde e es el vector unitario orientado por el eje de rotación; r es radio vector del punto corriente de la geodésica que se lee a partir del origen O elegido sobre el eje de rotación; t es el vector tangente unitario de la geodésica. Comprobar luego que la diferencial del producto obtenido mixto es igual a cero. El teorema recíproco no es cierto, ya que a

lo largo de cualquier paralela la relación indicada se cumple, pero, sin embargo, no toda paralela es una geodésica.

867. Sea r_0 el radio del paralelo más ancho L del elipsoide de rotación y sea M_0 un punto sobre este paralelo. Examinemos la geodésica que pasa por el punto M_0 bajo el ángulo $\mu_0 = 0$ respecto al paralelo L. Según el teorema de Clairaut a lo largo de esta geodésica

$$\rho \cos \mu = r_0;$$

de aquí se deduce que

$$\rho = r_0, \quad \cos \mu = 1.$$

De este modo, $\mu = 0$ y la geodésica coincide con el paralelo L.

Tomemos ahora la geodésica que corta el paralelo en un ángulo recto, o sea, $\mu_0 = \pi/2$. Según el teorema de Clairaut $\rho \cos \mu = 0$; por consiguiente, $\mu = \pi/2$ y la geodésica coincide con el meridiano.

Supongamos ahora que $0 < \mu_0 < \pi/2$. Designemos $r_0 \cos \mu_0 = C_0$, obtendremos que a lo largo de la geodésica $\rho \cos \mu = C_0$. De aquí resulta que ella corta todos los paralelos de elipsoide con radios $\rho < C_0$ en un ángulo no nulo y, tocando el paralelo con radio $\rho = C_0$ regresa al paralelo L (fig. 193).

868. Sea r_0 el radio del paralelo más estrecho L_0 del hiperboloide de rotación de una hoja y sea M_1 un punto que está sobre el paralelo L_1 distinto de L_0.

Es evidente que para las geodésicas que pasan por el punto M_1 la constante C en el teorema de Clairaut puede tomar los valores dentro de los límites de $0 \leqslant C \leqslant r_1$, donde r_1 es el radio del paralelo L_1. Si $C < r_0$, entonces la geodésica corta todos los paralelos de la superficie bajo un ángulo no nulo.

Para $C \geqslant r_0$ toda línea geodésica se situará en la parte de la superficie que está acotada por el paralelo L de radio C y contiene el punto M_1 y cortará todos los paralelos de esta parte de la superficie, salvo L. Si $C > r_0$, la geodésica toca el paralelo L; si $C = r_0$, la geodésica se aproxima infinitamente al paralelo L, dando en este caso un número infinito de vueltas sobre la superficie (fig. 194).

869. Sean r_0 y r_1 los radios de los paralelos más estrecho y más ancho, respectivamente. La constante C en el teorema de Clairaut puede tomar los valores dentro de los límites $0 \leqslant C \leqslant r_1$. Las geodésicas del toro son todos los meridianos (para $C = 0$), el paralelo más estrecho (para $C = r_0$) y el más ancho (para $C = r_1$). Si C no es igual a los valores indicados, la geodésica oscila entre dos paralelos de radio C lo mismo que una sinusoide. Por último, sobre el toro existen geodésicas (para $C = r_0$) que se devanan en el toro, acercándose infinitamente al paralelo más estrecho por ambos lados y dando un número infinito de vueltas (fig. 195).

870. INDICACIÓN. Válgase de un sistema semigeodésico de coordenadas.

871. Las condiciones de ortonormalidad del sistema de referencia tienen la forma

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

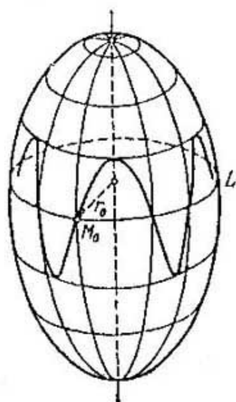


Fig. 193.

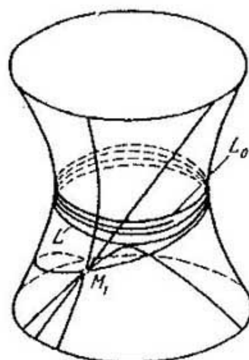


Fig. 194.

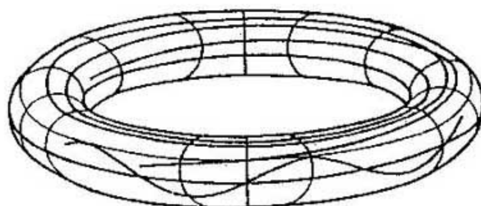


Fig. 195.

Derivando estas igualdades y empleando las fórmulas (2) del § 18, obtenemos

$$de_i \cdot e_j + e_j \cdot de_j = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{3} \omega_i^h e_h \cdot e_j + \sum_{h=1}^{3} \omega_j^h e_i \cdot e_h = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{3} \omega_i^h \delta_{hj} + \sum_{h=1}^{3} \omega_j^h \delta_{ih} = 0$$

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0.$$

872. Como M es el radio vector de un punto de la superficie, dM pertenece al plano tangente y por eso es una combinación lineal de los vectores e_1 y e_2.

873. La función vectorial e_3 determina la aplicación esférica de la superficie, por eso $de_3(h) = \mathcal{A}(h)$, donde $\mathcal{A}$ es el operador principal. Para el vector h que tiene la dirección principal, $\mathcal{A}(h) = \lambda h$. Si e_1 es tangente a la línea de curvatura γ, entonces

$$de_3(e_1) = \omega_3^1(e_1)\, e_1 + \omega_3^2(e_1)\, e_2$$

será colineal a e_1, es decir $\omega_3^2(e_1) = 0$ en los puntos de la línea γ.

874. Puesto que M es el radio vector de un punto de la superficie, la función vectorial M será la transformación idéntica de la superficie y $dM(h) = h$ para todo vector tangente h. En particular,

$$dM(e_1) = \omega^1(e_1)\, e_1 + \omega^2(e_1)\, e_2 = e_1,$$

$$dM(e_2) = \omega^1(e_2)\, e_1 + \omega^2(e_2)\, e_2 = e_2.$$

875. Como los vectores e_1, e_2 son unitarios y $|\partial_u r| = \sqrt{E}$, $|\partial_v r| = \sqrt{G}$, entonces del enunciado del problema obtendremos $\partial_u r = \sqrt{E} e_1$, $\partial_v r = \sqrt{G} e_2$. Luego

$$\omega^1 = f_1\, du + f_2\, dv, \quad f_1 = \omega^1(d_u r), \quad f_2 = \omega^2(d_u r),$$

$$\omega^1(\partial_u r) = \omega^1(\sqrt{E} e_1) = \sqrt{E}\omega^1(e_1) = \sqrt{E},$$

$$\omega^1(\partial_v r) = \omega^1(\sqrt{G} e_2) = \sqrt{G}\omega^1(e_2) = 0.$$

Por eso $\omega^1 = \sqrt{E}\, du$. Lo mismo para la forma ω^2.

876. Para las 1-formas ω^1, ω^2 las expresiones requeridas se obtuvieron en el problema 875. Para $\omega_1^3 = \lambda\, du + \mu\, dv$ del problema 874 resulta que $\mu = 0$. Designando $\lambda = p_1\sqrt{E}$, obtenemos $\omega_1^3 = p_1\sqrt{E}\, du$. Análogamente, $\omega_2^3 = p_2\sqrt{G}\, dv$.

Para la forma $\omega_1^2 = f\, du + g\, dv$ designemos $f = q_1\sqrt{E}$, $g = q_2\sqrt{G}$.

877. Examinemos cierto sistema ortonormalizado de referencia

$$(M_0, e_1^0, e_2^0, e_3^0)$$

con el origen en el punto M. Si el sistema (4) del § 18 es completamente integrable, existe la solución única

$$M = M(u, v), \quad e_i = e_i(u, v)$$

que satisface las condiciones iniciales

$$M(u_0, v_0) = M_0, \quad e_i(u_0, v_0) = e_i^0.$$

Geométricamente esto quiere decir que existe una superficie con cada punto de la cual está relacionando el sistema ortonormalizado de referencia (M, e_1, e_2, e_3).

878. Sean cumplidas las condiciones (3), entonces

$$d\omega_1^2 = (\partial_u (q_2 \sqrt{G}) - \partial_v (q_1 \sqrt{E}))\, du \wedge dv,$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = -p_1 \sqrt{E}\, p_2 \sqrt{G}\, du \wedge dv;$$

por eso de las condiciones (5) se deduce que $d\omega_2^3 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$. Es análogo para las demás formas y para la afirmación contraria.

881. La curvatura normal de la línea γ definida por las ecuaciones interiores $u = u(s)$, $v = v(s)$ se halla por la fórmula

$$k_n = \frac{\varphi_2(\gamma')}{\varphi_1(\gamma')} = \frac{p_1 E (u')^2 + p_2 G (v')^2}{E (u')^2 + G (v')^2}.$$

Si γ es la línea de coordenadas $v = 0$, entonces $v' = 0$ $k_1 = p_1$. Es análogo para la segunda línea de coordenadas.

882. El desplazamiento de un punto con radio vector $F = M + \lambda e_1$, que pertenece a la recta Me_1 es igual a

$$d(M + \lambda e_1) = (\sqrt{E}\, du + d\lambda)\, e_1 +$$
$$+ [\sqrt{G}\, dv + \lambda (q_1 \sqrt{E}\, du + q_2 \sqrt{G}\, dv)]\, e_2 + p_1 \sqrt{E}\, du\, e_3.$$

Cuando el punto M se desplaza por la primera línea de coordenadas $u = \text{const}$, entonces $\partial_v M = \sqrt{G} e_2$ y el punto F se desplaza por la arista de retroceso, es decir el vector $\partial_v (M + \lambda e_1)$ es colineal al vector e_1, de donde

$$\partial_v (M + \lambda e_1) = \partial_v \lambda e_1, \quad 1 + \lambda q_2 = 0.$$

De un modo análogo obtendremos $1 - \lambda q_1 = 0$.

883. Sea h el vector tangente único de una curva en una superficie. Entonces

$$h = \cos\varphi e_1 + \operatorname{sen}\varphi e_2 = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{E}} \partial_u r + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{G}} \partial_v r,$$

$$k_n(h) = \frac{\varphi_2(h)}{\varphi_1(h)} = \frac{p_1 E \dfrac{\cos^2\varphi}{E} + p_2 G \dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{G}}{E \dfrac{\cos^2\varphi}{E} + G \dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{G}} = p_1 \cos^2\varphi + p_2 \operatorname{sen}^2\varphi.$$

884. Escojamos en un punto M del plano tangente a la superficie, el sistema rectangular de coordenadas cartesianas (M, e_1, e_2), y a las coordenadas de un punto arbitrario en este sistema las designamos x e y. Si φ es el ángulo comprendido entre la primera línea de coordena-

das y una sección normal arbitraria, entonces, de la definición de la indicatriz de Dupin, resulta que

$$x=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{|k_n|}}, \qquad y=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{|k_n|}}.$$

Entonces, de la fórmula de Euler

$$k_n = p_1\cos^2\varphi + p_2\operatorname{sen}^2\varphi$$

obtendremos

$$p_1x^2 + p_2y^2 = \pm 1.$$

885. INDICACIÓN. La fórmula se deduce de las primeras tres ecuaciones del sistema (5) del § 18.

886. Al desplazarse por la línea asintótica

$$e_3d^2M = p_1E\,du^2 + p_2G\,dv = 0.$$

Por eso, de las ecuaciones (2) y (3) del § 18 y de la fórmula $K = p_1p_2$ resulta que

$$K\,dA^2 + de_3^2 = 0,$$

de donde

$$K + \left(\frac{de_3}{ds}\right)^2 = 0.$$

Como a lo largo de la línea asintótica el vector binormal b coincide con el vector e_3, entonces

$$\frac{de_3}{ds} = -\varkappa n.$$

Por consiguiente, $K + \varkappa^2 = 0$.

887. Las expresiones indicadas se obtienen de las fórmulas (2) y (3) del § 18 y

$$k_g = \left(e_3\,\frac{dM}{ds}\,\frac{d^2M}{ds^2}\right).$$

888. Del problema 878 tenemos $d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$ y por las fórmulas (3) del § 18

$$d\omega_1^2 = -p_1p_2\sqrt{EG}\,du\wedge dv, \qquad \omega^1\wedge\omega^2 = \sqrt{EG}\,du\wedge dv,$$

de donde

$$d\omega_1^2 = -k\omega^1\wedge\omega^2.$$

889. Examinemos sobre la superficie los vectores $a = a^\alpha e_\alpha$, $b = b^\alpha e_\alpha$.

Al trasladarlos en paralelo por la superficie tenemos

$$da = a^\beta\omega_\beta^3 e_3, \qquad db = b^\beta\omega_\beta^3 e_3,$$

$$d(a\cdot b) = da\cdot b + a\cdot db = (a^\beta\omega_\beta^3 e_3)\,b^\alpha\cdot e_\alpha + a^\alpha e_\alpha\cdot(b^\beta\omega_\beta^3 e_3).$$

Como $e_3\cdot e_\alpha = 0$, entonces $d(a\cdot b) = 0$ y, por consiguiente, el producto escalar de los vectores, al trasladarlos en paralelo, se con-

serva. Y por eso se conservan también las longitudes de los vectores y los ángulos comprendidos entre ellos.

891. Derivando la relación $\xi \cdot e_1 = \cos \varphi$, hallamos

$$-\operatorname{sen} \varphi d\varphi = d\xi \cdot e_1 + \xi \cdot de_1 = a^\alpha \omega_\alpha^3 e_3 \cdot e_1 + \xi \cdot de_1 = \xi \cdot de_1.$$

Si en lugar de ξ se toman otros vectores trasladables a lo largo de la línea dada, entonces los ángulos φ formados por ellos con el vector ξ se distinguirán unos de otros en un valor constante, ya que los ángulos comprendidos entre los vectores se conservan al trasladar a éstos en paralelo. Por lo tanto, $d\varphi$, para cualquier vector que se traslada en paralelo, tendrá un mismo valor. Al escoger en calidad de ξ el vector e_2, obtenemos

$$-d\varphi = e_2 \cdot de_1 = \omega_1^2 = q_1 \sqrt{E}\, du + q_2 \sqrt{G}\, dv.$$

892. De la fórmula (6) del § 18 tenemos

$$\Delta\varphi = \oint_L -(q_1 \sqrt{E}\, du + q_2 \sqrt{G}\, dv),$$

por la fórmula

$$\oint_L P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

utilizando (5) del § 18, hallamos

$$\Delta\varphi = \iint_D K \sqrt{EG}\, du\, dv.$$

Puesto que

$$K = p_1 \cdot p_2, \qquad d\sigma = \sqrt{EG}\, du\, dv,$$

entonces

$$\Delta\varphi = \iint_D K\, d\sigma.$$

893. Sean $\frac{dA}{ds}$ el vector unitario de la tangente al contorno L en el punto A; s la longitud del arco de la línea L; a el vector unitario en la superficie que recorre en paralelo el contorno L. En este caso

$$\cos \psi = a \cdot \frac{dA}{ds}, \quad da = a^\alpha \omega_\alpha^3 e_3.$$

De aquí

$$-\operatorname{sen} \psi d\psi = a \cdot \frac{d^2 A}{ds^2}\, ds.$$

Supongamos que en cierto punto A_0 del contorno L

$$\psi=\frac{\pi}{2},\qquad a=\frac{dA}{ds}\times e_3.$$

Entonces,

$$d\psi=\left(e_3\ \frac{dA}{ds}\ \frac{d^2A}{ds^2}\right)ds,$$

o bien

$$d\psi=k_g\,ds.$$

Una vez que el punto A ha recorrido por completo la frontera L, el vector $\frac{dA}{ds}$ girará a partir de la posición inicial A_0 en un ángulo de 2π; el ángulo de giro del vector a respecto al vector $\frac{dA}{ds}$ será

$$\Delta\psi=\oint_L k_g\,ds.$$

Por consiguiente,

$$\Delta\varphi+\Delta\psi=2\pi.$$

896. De la fórmula

$$\iint_D K\,d\sigma+\int_L k_g\,ds=2\pi$$

para $k_g=0$ resulta que

$$\iint_D K_d\sigma=2\pi.$$

Pero esta igualdad no puede existir, si en todos los puntos de la superficie $K\leqslant 0$.

897. Sobre el plano xOy se proyecta la región interior de la elipse

$$2x^2+3y^2-2xy-4x+18y-16=0,\qquad z=0;$$

sobre el plano yOz se proyecta la región interior de la elipse

$$5y^2+8z^2+32y-32z-4=0,\qquad x=0;$$

sobre el plano xOz se proyecta la región interior de la elipse

$$23x^2+54z^2+18x-216z-324=0,\qquad y=0.$$

900. Mostremos que cada una de las líneas asintóticas l es recta. Supongamos lo contrario. Las normales a la superficie a lo largo de la línea l son paralelas al plano fijo, por eso $m\cdot e=0$, donde e es un vector constante. Como sobre la línea asintótica el vector de la binormal $b=\pm m$, entonces $b\cdot e=0$. Derivando esta igualdad, obtenemos

$$\varkappa n\cdot e=0.$$

Pero $\varkappa\neq 0$, ya que en caso contrario $b=m$ es un vector constante y la imagen esférica de la línea asintótica será un punto. Y bien,

$$b\cdot e=n\cdot e=0;$$

por consiguiente, $t = \pm c$, de donde

$$\frac{dt}{ds} = kn = 0 \quad \text{y} \quad k = 0$$

contrariamente a lo supuesto. Así, la superficie S es reglada. Ella no puede ser desarrollable, ya que en este caso la imagen esférica de la línea asintótica es un punto.

901. Si las ecuaciones de la superficie de rotación se escriben en la forma

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\operatorname{sen} v, \quad z = u,$$

entonces la anulación de la curvatura media da

$$1 + \varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0.$$

Efectuemos la sustitución de las variables tomando como función nueva $p = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ y a φ como nueva variable independiente. Entonces,

$$1 + p^2 - \varphi p\frac{dp}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{2}d(\ln(1+p^2)),$$

de donde

$$c^2\varphi^2 = 1 + p^2.$$

Pasando a las variables iniciales, obtenemos

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2\varphi^2 - 1}} = du,$$

$$(1 + u^2) f'(u) = a, \quad f'u = a/(1 + u^2).$$

Integrando esta ecuación, nos queda,

$$f(u) + b = z + b = a \operatorname{arctg} u.$$

Por consiguiente,

$$u = \operatorname{tg}\frac{z+b}{a}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z+b}{a}.$$

Esta es la ecuación implícita del helicoide directo

$$x = \tilde{u}\cos\tilde{v}, \quad y = \tilde{u}\operatorname{sen}\tilde{v}, \quad z = a\tilde{v} - b.$$

904 Los coeficientes de la primera y la segunda formas cuadráticas de las superficies S y S^* están vinculados por las relaciones

$$E^* = (1 - a^2K)E + 2a(aH - 1)L,$$

$$F^* = (1 - a^2K)F + 2a(aH - 1)M,$$

$$G^* = (1 - a^2K)G + 2a(aH - 1)N,$$

$$L^* = aKE + (1 - 2aH)L,$$

$$M^* = aKF + (1 - 2aH)\,M,$$
$$N^* = aKG + (1 - 2aH)\,N.$$

De aquí obtenemos las expresiones buscadas:

$$K^* = \frac{K}{1-2aH+a^2K}, \qquad H^* = \frac{H-aK}{1-2aH+a^2K}.$$

905. Sustituyendo $a = 1/2H$ en la fórmula

$$K^* = \frac{K}{1-2aH+a^2K},$$

obtenemos

$$K^* = 4H^2 = \text{const.}$$

906. Supongamos que en la superficie S las líneas de las coordenadas coinciden con las de curvatura. Utilizando el operador principal, obtenemos

$$r_u^* = (1 - ak_1)\,r_u, \quad r_v^* = (1 - ak_2)\,r_v.$$

Por lo tanto, los coeficientes de las primeras formas cuadráticas de las superficies S y S^* están enlazados por las relaciones

$$E^* = (1 - ak_1)^2E, \quad G^* = (1 - ak_2)^2G, \quad F^* = F = 0.$$

De aquí

$$d\sigma^* = (1 - ak_1)\,(1 - ak_2)\,d\sigma$$

y

$$\lim_{a\to 0} \frac{d\sigma - d\sigma^*}{2a\,d\sigma} = \lim_{a\to 0} \left(\frac{k_1+k_2}{2} + \frac{1}{2}\,ak_1k_2\right) = \frac{k_1+k_2}{2} = H.$$

907. Sea S la superficie mínima y sea S^* una superficie paralela a ésta, además, la distancia entre ellas medida por la normal es igual a a. Según se deduce del problema 906, los elementos correspondientes de las superficies S^* y S están enlazados por la relación

$$d\sigma^* = (1 + a^2K)\,d\sigma,$$

donde K es la curvatura total de la superficie S. Por consiguiente

$$\iint_D d\sigma^* = \iint_D d\sigma + a^2 \iint_D K\,d\sigma.$$

Como sobre la superficie mínima $K \leqslant 0$, entonces

$$\iint_D d\sigma^* \leqslant \iint_D d\sigma.$$

910. Para que las rectas tengan una envolvente (es decir, engendren una superficie desarrollable), hay que hacer

$$p = c \pm \frac{t^2}{2}, \quad c = \text{const.}$$

La figura constituida por las aristas de retroceso se determina por la ecuación

$$9\,(xz - y)^2 - 4z^6 = 0.$$

Las ecuaciones de las aristas de retroceso son:

$$x=c\pm\frac{t^2}{2},\quad y=-\frac{t^3}{6}\mp ct,\quad z=\mp t.$$

La línea de intersección con el plano xOy es:

$$8(x-c)^3-9y^2=0.$$

911. Tomemos el eje del cilindro como eje Oz y el Ox lo situamos en el plano secante. Entonces las ecuaciones del cilindro tendrán la forma

$$x=a\cos t,\quad y=a\operatorname{sen} t,\quad z=u$$

y la ecuación del plano secante será

$$z=Ay.$$

Cortemos el cilindro por la generatriz que interseca al eje Ox y coloquémoslo sobre el plano xOz. Puesto que después de la superposición el papel de abscisa lo desempeñará la longitud del arco de la sección perpendicular del cilindro $s=at$, entonces, la ecuación de la línea buscada será

$$z=aA\operatorname{sen}(s/a),$$

o sea, una sinusoide.

912. Supongamos que el plano δ que pasa por la recta d corta la esfera por la circunferencia γ. Examinemos el cono circular que toca la esfera a lo largo de γ. Sus generatrices tocan las trayectorias ortogonales de la circunferencia. Pero los vértices de todos esos conos se encuentran sobre la recta d', polar a d. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales serán circunferencias formadas por la intersección de la esfera con el haz de los planos que pasan por d'.

913. La ecuación general del movimiento del punto por la superficie tiene la forma

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=F+Rm-\mu\,|R|\,t,$$

donde F es la fuerza externa, R es la reacción normal de la superficie, μ es el coeficiente de rozamiento, t es el vector unitario de la tangente a la trayectoria y m es el vector unitario de la normal a la superficie. Como

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}t+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dt}{ds},$$

entonces, cuando $F=0$, la ecuación de movimiento tomará la forma

$$m\left(\frac{d^2s}{dt^2}t+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dt}{ds}\right)=Rm-\mu\,|R|\,t.$$

Multiplicándola escalarmente por $t\times m$, obtenemos

$$tm\frac{dt}{ds}=\frac{dr}{ds}m\frac{d^2r}{ds^2}=0,$$

es decir, el punto se mueve por la línea geodésica (véase el problema 843).

914. $X = F_x\Phi$, $Y = F_y\Phi$, $Z = F_z\Phi$, donde

$$\Phi = \frac{xF_x + yF_y + zF_z}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

y el punto $M(x, y, z)$ satisface a la ecuación

$$F(x, y, z) = 0.$$

915. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + \varepsilon b^2y^2 + \varepsilon' c^2z^2$.
916. $2z(x^2 + y^2 + z^2) = ax^2 + by^2$.
917. $z(x^2 + y^2 + z^2) + axy = 0$.
919. Es una superficie desarrollable.
920. Solamente en las superficies desarrollables.
922. Tomemos una de las familias dadas de geodésicas como líneas de coordenadas u del sistema semigeodésico de coordenadas. Entonces

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2.$$

Si φ es el ángulo comprendido entre las líneas de coordenadas u y las líneas geodésicas de la segunda familia, entonces

$$\cos\varphi = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G\,dv^2}}.$$

Teniendo en cuenta la constancia del ángulo φ, obtenemos

$$\frac{du}{dv} = a\sqrt{G}, \quad \text{donde} \quad a = \text{const}.$$

Sustituyendo lo obtenido en la ecuación diferencial de las líneas geodésicas, nos resulta $G_u = 0$; por consiguiente, $G = G(v)$ y la primera forma cuadrática se reduce a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Por el contrario, sea S una superficie desarrollable. Como ella se puede superponer al plano y con la superposición las líneas geodésicas pasan a las geodésicas y los ángulos entre las líneas se conservan, entonces es suficiente señalar que en el plano existen las familias indicadas de geodésicas.

923. La generatriz de una superficie cónica en la cual existe un punto de una línea geodésica, se encuentra en el plano rectificante de esta línea. Por eso la perpendicular trazada desde el vértice del cono al plano osculador corta la tangente. Su longitud es

$$d = p \operatorname{sen} \alpha,$$

donde p es el segmento de la generatriz, α es el ángulo comprendido entre esta última y la tangente. Al poner la superficie cónica sobre el plano la línea geodésica se convierte en una recta y la distancia d a lo largo de la misma es constante. Pero las magnitudes p y α tienen un mismo valor que sobre el cono, por eso también sobre el cono $p \operatorname{sen} \alpha = d$ es constante.

Para demostrar el teorema recíproco basta determinar que las líneas dotadas de la propiedad indicada se convierten en rectas al superponer el cono sobre el plano.

924. Tomemos sobre una superficie el sistema semigeodésico de coordenadas. Entonces

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2.$$

Sobre la línea $u=0$ tenemos $\sqrt{G}\,|_{u=0}=1$. De la ecuación de las líneas geodésicas obtendremos, además, $\left.\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right|_{u=0}=0$. En el sistema semigeodésico de coordenadas

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

(véase el problema 749).

1) Si $K=0$, entonces

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u^3}=0$$

y la solución de esta ecuación que satisface a las condiciones iniciales indicadas anteriormente será $\sqrt{G}=1$. Por eso, para todas las superficies de curvatura total nula la primera forma cuadrática se reduce al aspecto

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

y, por lo tanto, todas ellas son aplicables una a otra.

2) Si $K=\frac{1}{a^2}$ ($a=\text{const}$), entonces

$$\sqrt{G}=\cos(u/a) \quad \text{y} \quad ds^2=du^2+\cos^2(u/a)\,dv^2.$$

3) Si $K=-1/a^2$ ($a=\text{const}$), entonces

$$ds^2=du^2+\operatorname{ch}^2(u/a)\,dv^2.$$

933. Un plano tangente a una superficie S en un punto M tiene como vectores directores suyos a $\partial_u r$ y $\partial_v r$, donde (U, r) es la parametrización de S. Para la transformación afín $\mathcal{A}(U, \mathcal{A}\circ r)$ es la parametrización de la superficie $\mathcal{A}(S)=S'$ y $\partial_u(\mathcal{A}\circ r)$ y $\partial_v(\mathcal{A}\circ r)$ serán los vectores directores del plano tangente de la superficie S' en el punto $\mathcal{A}(M)=M'$. Pero $\partial_u(\mathcal{A}\circ r)=\mathcal{A}(\partial_u r)$, $\partial_v(\mathcal{A}\circ r)=\mathcal{A}(\partial_v r)$. Por eso, bajo el efecto de $\mathcal{A}$, el plano tangente a S pasa a ser plano tangente a S'.

939. Afín.

940. Métrico, ya que, por ejemplo, una circunferencia con ayuda de la transformación afín puede pasar a ser elipse.

941—946. Métricos.

947—948. Afines. 949—952. Métricos.

953. Afín.

954. Métrico, así, por ejemplo, con la transformación afín

$$\tilde{x}=x, \quad \tilde{y}=y, \quad \tilde{z}=kz$$

del catenoide

$$x=a\operatorname{ch}(u/a)\cos v, \quad y=a\operatorname{ch}(u/a)\operatorname{sen} v, \quad z=u$$

una de las secciones normales principales (la circunferencia en el plano xOy) no cambia su curvatura, mientras que la segunda sección (el meridiano del catenoide) la cambia. Como resultado varía la curvatura media.

955. Afín, ya que los tipos de puntos se distinguen por la cantidad de direcciones asintóticas en un punto dado de la superficie.

956. Métrico.

957. Afín.

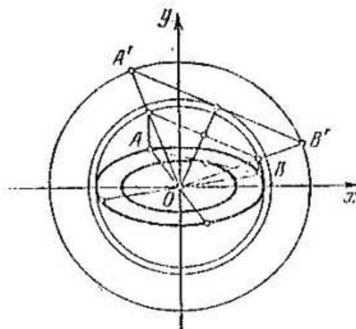


Fig. 196.

958. Valgámonos del carácter afín del problema. Hagamos pasar la elipse dada a una circunferencia

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

por la transformación afín

$$x' = \frac{1}{a} x, \quad y' = \frac{1}{b} y.$$

Entonces los diámetros conjugados pasarán a ser diámetros recíprocamente perpendiculares de la circunferencia, y la circunferencia

$$x'^2 + y'^2 = 1/2$$

erá la envo vente de las imágenes de las cuerdas de la elipse. Por eso la envolvente buscada será la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

(fig. 196).

959. Utilicemos el carácter afín del problema. Transformemos la elipse dada en una circunferencia

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

mediante la transformación afín

$$x' = x/a, \quad y' = y/b,$$

y sirvámonos de la fórmula conocida $S' = S\Delta$, donde Δ es el determinante de la transformación afín. En nuestro caso $\Delta = 1/ab$ y $S' = S/ab$. La envolvente de las imágenes de las rectas dadas será una circunferencia de radio $R' = \cos S'$, o sea,

$$x'^2 + y'^2 = R'^2.$$

Por lo tanto, la ecuación buscada será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \frac{S}{ab}.$$

Esto es una elipse, semejante a la dada, con coeficientes de semejanza $\cos (S/ab)$.

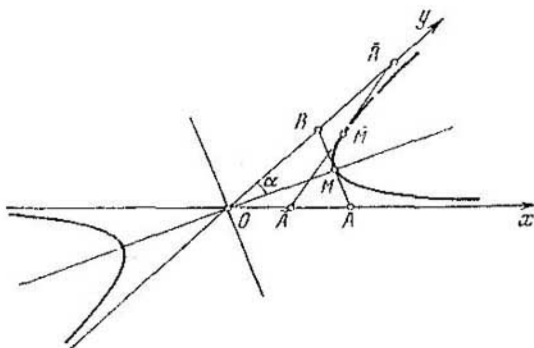


Fig. 197.

960. Adoptemos las rectas dadas como ejes del sistema afín de coordenadas y los vectores de longitud unitaria como vectores de escala sobre las mismas (fig. 197). Tomemos la recta AB de la familia, perpendicular a una de las bisectrices de los ángulos de coordenadas. Examinemos la hipérbola que tiene como asíntotas los ejes de coordenadas y toca la recta AB en el punto M (a, a). Su ecuación tiene la forma $xy = c$. Expresemos c por medio de S:

$$OA = OB = 2a, \quad S = 2a^2 \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Como el punto M pertenece a la hipérbola, entonces $a^2 = c$ y obtendremos

$$c = \frac{S}{2 \operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Por consiguiente, la ecuación de la hipérbola será

$$xy = \frac{S}{2 \operatorname{sen} 2\alpha}. \qquad (*)$$

Efectuemos ahora un giro hiperbólico que haga pasar la hipérbola (*) sobre sí misma y traslade el punto M, a cualquier punto $\bar{M}$. Como es sabido, en este caso la cuerda AB pasará a ser tangente de la hipérbola en el punto $\bar{M}$, que corta del ángulo de las coordenadas un triángulo de la misma área S, o sea, a una recta arbitraria de la familia dada.

De este modo, la hipérbola (*) es la envolvente de la familia de rectas que cortan de los ángulos de coordenadas primero y tercero los triángulos de área S. Análogamente, la hipérbola conjugada

$$xy = -\frac{S}{2 \operatorname{sen} 2\alpha}$$

es la envolvente de la familia de rectas que cortan los triángulos de área S de los ángulos de coordenadas segundo y cuarto.

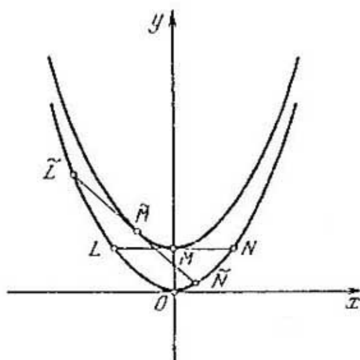


Fig. 198.

961. Examinemos la recta LN de la familia que es perpendicular al eje Oy y lo corta en el punto M (0, b). Expresemos b por S:

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{b/a}} ax^2\,dx \text{ de donde } b = \left(\frac{9aS^2}{4}\right)^{1/3}.$$

Construyamos la parábola que se obtiene de la dada por el desplazamiento de b a lo largo del eje Oy (fig. 198). Su ecuación es:

$$y = ax^2 + \left(\frac{9aS^2}{4}\right)^{1/3}. \qquad (*)$$

Efectuemos ahora un giro hiperbólico que traslade la parábola (*) sobre sí misma y el punto M a un punto $\widetilde{M}$ cualquiera. Con ello la parábola $y = ax^2$ también se trasladará sobre sí misma y la cuerda LN, pasará a ser tangente a la parábola (*) en el punto $\widetilde{M}$, o sea, será una recta arbitraria de la familia dada. Así, pues, la parabola (*) es la envolvente buscada.

962. Sea

$$\rho = r(u) + ve(u)$$

la ecuación de una superficie reglada oblicua. Su segunda forma cuadrática tiene el aspecto

$$\varphi_2 = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv,$$

donde

$$L = \frac{v^2(e'ee'') + v(e'er'' + r'ee'') + r'er''}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M = \frac{r''ee'}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

De la condición

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv = 0$$

hallamos que la dirección asintótica, distinta de la dirección de la generatriz rectilínea, se caracteriza por el vector

$$\rho_u + \rho_v\frac{dv}{du} = r' + ve' - \frac{L}{2M}e$$

($M \neq 0$, según el enunciado del problema).

La ecuación de la superficie engendrada por las tangentes a las líneas asintóticas a lo largo de la generatriz correspondiente a $u = u_0$, tiene la forma

$$R = r_0 + ve_0 + w\left(r'_0 + ve'_0 - \frac{L_0}{2M_0}e_0\right). \qquad (*)$$

Escojamos un sistema afín de coordenadas con origen en el punto A_0, con radio vector r_0 y con vectores de escala de los ejes de coordenadas r'_0, e_0, e'_0. Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{e'_0e_0e''_0}{r'_0e_0e'_0} = a, \qquad \frac{e'_0e_0r''_0 + r'_0e_0e''_0}{r'_0e_0e'_0} = b, \qquad \frac{r'_0e_0r''_0}{r'_0e_0e'_0} = c$$

(a, b, c son constantes). Entonces, las ecuaciones de la superficie (*) se puede escribir de forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= w, \\ x_2 &= v - \frac{w}{2}(av^2 + bv + c), \\ x_3 &= vw. \end{aligned}\right\}$$

De donde

$$x_1x_2 = x_3 - \frac{a}{2}x_3^2 - \frac{b}{2}x_1x_3 - \frac{c}{2}x_1^2.$$

Transformando las coordenadas por las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{x}_1 = x_1,\\ \tilde{x}_2 = \frac{c}{2}x_1 + x_2 + \frac{b}{2}x_3,\\ \tilde{x}_3 = x_3,\end{array}\right\}$$

obtendremos

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \frac{a}{2}\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_3 = 0.$$

Si $a \neq 0$, obtendremos un hiperboloide de una hoja; si $a = 0$, un paraboloide hiperbólico (la condición $a = 0$ significa que la superficie inicial se compone de rectas paralelas a cierto plano).

963. $x^2 + y^2 = C$, o sea, circunferencias concéntricas y el punto $O(0, 0)$.

964. $x^2 - y^2 = C$, hipérbolas equiláteras coasintóticas y sus asíntotas (fig. 199).

965. $y = Cx^2$, o sea, parábolas y la recta $y = 0$.

966. Las circunferencias $C(x^2 + y^2) = 2x$ y recta (fig. 200).

967. $Cx^2 = 2x - y + 1$, parábolas con los ejes paralelos al eje Oy, que pasan por el punto $(0, 1)$ y tocan en este punto la recta $2x - y + 1 = 0$, y esta misma recta (fig. 201).

968. Los planos paralelos $x + y + z = C$.

969. Las esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$.

970. $x^2 + y^2 - z^2 = C$, hiperboloides de una hoja y de dos hojas con un cono asintótico común, y el propio cono (fig. 202).

971. $-4C^2(x^2 + y^2) + 4(256 - C^2)z^2 = C^2(256 - C^2)$ $(C \geqslant 0)$. Cuando $C = 0$ se obtiene el plano xOy; cuando $0 < C < 16$, hiperboloides de rotación de dos hojas con eje de rotación Oz (fig. 203); cuando $C = 16$, el eje Oz; cuando $C > 16$, elipsoides de rotación con eje de rotación Oz (fig. 204).

972. 1.

973. 5.

974. $(0, 0)$, $(1, 1)$.

975. $N(7, 2, 1)$.

976. $(2x - y - z)\,i + (4y + z - x)\,j + (6z - x + y)\,k$.

977. $3(x^2 - ayz)\,i + 3(y^2 - axz)\,j + 3(z^2 - ayx)\,k$.

978. $e^{x+y+z}\,[yz(x + 1)\,i + xz(y + 1)\,j + xy(z + 1)\,k]$.

979. $\frac{1}{1 + x^2}\,i + \frac{1}{1 + y^2}\,j + \frac{1}{1 + z^2}\,k$.

980. $9i - 3j$.

981. $|\operatorname{grad} u| = 6$; $\cos\alpha = 2/3$, $\cos\beta = -2/3$, $\cos\gamma = 1/3$.

982. $\operatorname{grad} u(O) = 3i - 2j - 6k$, $|\operatorname{grad} u(O)| = 7$,

$$\cos\alpha = 3/7,\ \cos\beta = -2/7,\ \cos\gamma = -6/7;$$

$$\operatorname{grad} u(A) = 7i,\ |\operatorname{grad} u(A)| = 7.$$

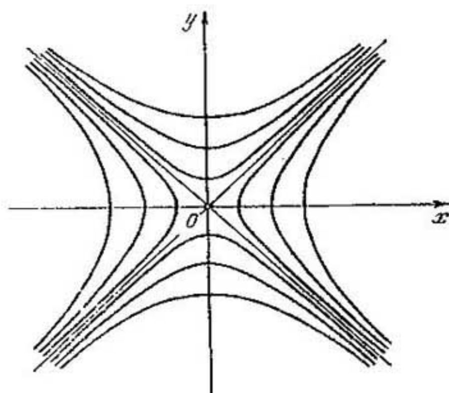


Fig. 199.

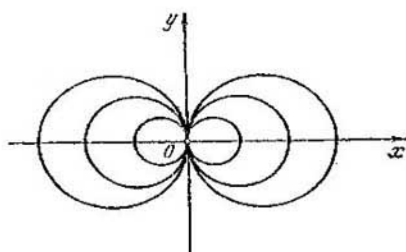


Fig. 200.

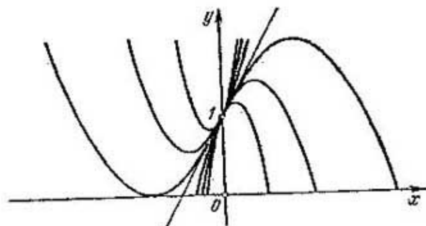


Fig. 201.

$$\cos\alpha = 1,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 0;\ \text{grad}\ u = 0$$

en el punto $N(-2, 1, 1)$.

983. $\cos\varphi = 3/\sqrt{10}$.
984. $\cos\varphi = -8/2025$.
985. $\pi/2$. 986. Crece; 12.
987. $M_1(4/5, -1/4)$, $M_2(-4/5, 9/4)$.
988. $2u/r$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; si $a=b=c$.

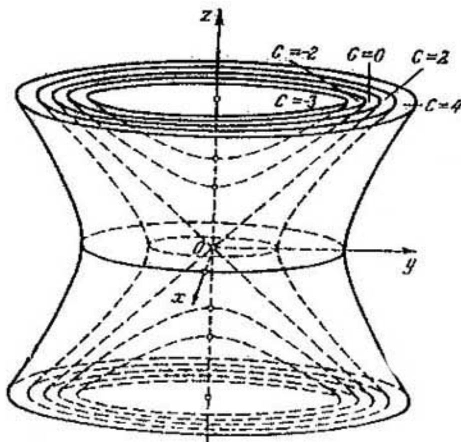


Fig. 202.

989. $\dfrac{\text{grad}\,u\cdot\text{grad}\,v}{|\,\text{grad}\,v\,|}$; si grad $u \perp$ grad v.

997. Como $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, entonces

$$\text{grad}\ r=\frac{\partial r}{\partial x}\,i+\frac{\partial r}{\partial y}\,j+\frac{\partial r}{\partial z}\,k=\frac{x}{r}\,i+\frac{y}{r}\,j+\frac{z}{r}\,k=\frac{r}{r}.$$

998. $f'(r)\,r/r$. 999. $nr^{n-2}\,r$. 1000. $-r/r^3$.

1001. r/r^2. 1002. Sea $c=c_1i+c_2j+c_3k$. Entonces $u=c\cdot r=$ $=c_1x+c_2y+c_3z$, de donde $\dfrac{\partial u}{\partial x}=c_1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=c_2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=c_3$. Por eso, grad $u=$ grad $(c\cdot r)=c_1i+c_2j+c_3k=c$.

1003. $\dfrac{a(b\cdot r)-b(a\cdot r)}{(b\cdot r)^2}$.

1004. $2r(c\cdot c)-2c(c\cdot r)=2c\times(r\times c)$.

1008. Sean e_u, e_v, e_w los versores de un sistema móvil de referencia. Los vectores e_u, e_v están en el plano tangente a la superficie de coordenadas $w=$ const; por eso el vector e_w es ortogonal a este plano

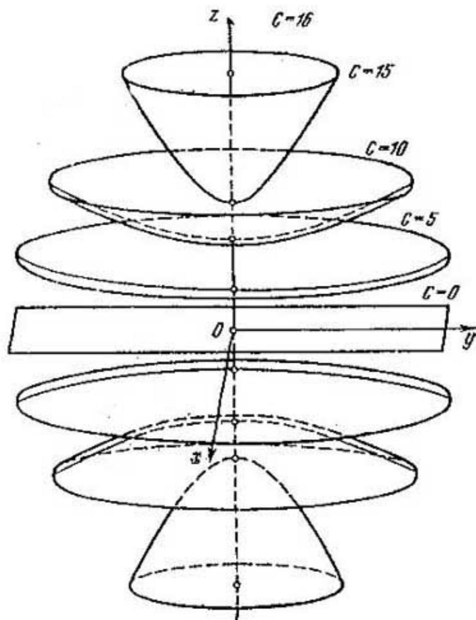


Fig. 203.

y, por consiguiente, ortogonal a la superficie de coordenadas $w=$ const. Por esta razón este vector es colineal al gradiente del escalar w, o sea,

$$e_w = k_3 \operatorname{grad} w, \qquad (*)$$

donde k_3 es cierto factor. Examinemos la línea $u=u(s)$, $v=v(s)$, $w=w(s)$. Derivando el radio vector

$$r = r[u(s),\ v(s),\ w(s)]$$

de un punto arbitrario suyo, obtenemos

$$\frac{dr}{ds}=r_u\frac{du}{ds}+r_v\frac{dv}{ds}+r_w\frac{dw}{ds},$$

Multipliquemos esta igualdad escalarmente por grad w:

$$\frac{dw}{ds}=\frac{dw}{ds}\,r_w\cdot\text{grad}\,w,$$

de donde $r_w\cdot\text{grad}\,w=1$. Observando que $r_w=|r_w|\,e_w$ y multiplicando la igualdad (*) escalarmente por r_w, obtendremos $|r_w|=k_3$.

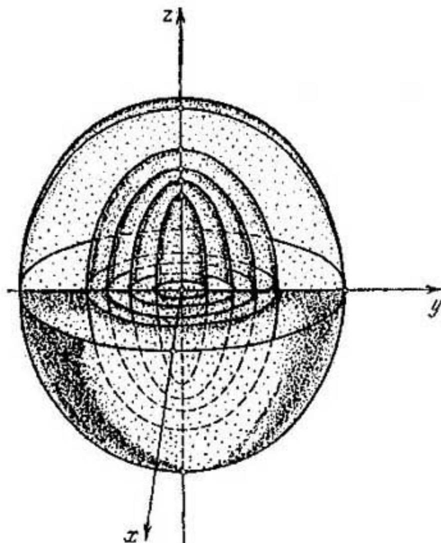


Fig. 204.

De la misma igualdad (*) hallamos $1=k_3\,|\text{grad}\,w|$. Aplicando razonamientos análogos a las superficies de coordenadas $u=\text{const}$ y $v=\text{const}$ obtenemos en total

$$\text{grad}\,f(u,\ v,\ w)=\frac{e_u}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{e_v}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{e_w}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w},$$

donde

$$k_1=|r_u|=1/|\text{grad}\,u|,$$

$$k_2=|r_v|=1/|\text{grad}\,v|,\quad k_3=|r_w|=1/|\text{grad}\,w|.$$

1009. $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$.

1010. $\varphi e_r + e_\varphi + e_z$. 1011. $z\varphi e_r + z e_\varphi + r\varphi e_z$.

1012. $e_r + \frac{z \cos \varphi}{r} e_\varphi + \operatorname{sen} \varphi e_z$.

1013. $2re_r - \frac{z \operatorname{sen} \varphi}{r} e_\varphi + \cos \varphi e_z$.

1014. $3r^2 e_r + \frac{z \operatorname{sen} 2\varphi}{r} e_\varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi e_z$.

1015. $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi$.

1016. $\varphi e_\rho + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} e_\varphi$. 1017. $\theta e_\rho + e_\theta$.

1018. $\theta\varphi e_\rho + \varphi e_\theta + \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} e_\varphi$. 1019. $e_\rho + \frac{\varphi \cos \theta}{\rho} e_\theta + \frac{1}{\rho} e_\varphi$.

1020. $e_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho} e_\theta - \frac{\theta}{\rho} e_\varphi$.

1021. $x^2 + y^2 = C_1^2$, $z = C_2$. 1022. $y = C_1 x$, $z = C_2 x^2$.

1023. $y - x = C_1 xy$, $x - z = C_2 xz$.

1024. $x^2 - y^2 = C_1$, $z = C_2 x^2$.

1025. $x = C_1 y$, $x = C_2 z$. 1026. $yz + 3 + 2z$.

1027. $12xy^2 + 4x^3 - 6xz$. 1033. 3.

1034. $\operatorname{div} (f(r) \mathbf{r}) = f(r) \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} f(r)$ Puesto que $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$, $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, entonces

$$\operatorname{div} (f(r) \mathbf{r}) = 3f(r) + rf'(r).$$

1035. $2/r$. 1036. $(n + s) r^n$.

1037. $\operatorname{div} (\operatorname{grad} f(r)) = \operatorname{div} \left(\frac{f'(r)}{r} \mathbf{r} \right) = \frac{f'(r)}{r} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \times$

$$\times \operatorname{grad} \frac{f'(r)}{r} = \frac{3f'(r)}{r} + \mathbf{r} \cdot \frac{r \operatorname{grad} f'(r) - f'(r) \operatorname{grad} r}{r^2} = \frac{3f'(r)}{r} +$$

$$+ \mathbf{r} \frac{rf''(r) \frac{\mathbf{r}}{r} - f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}}{r^2} = \frac{3f'(r)}{r} + \mathbf{r} \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = f''(r) +$$

$$+ \frac{2}{r} f'(r).$$

1038. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

1039. $u \Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$. 1040. $u \Delta u + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v$.

1041. $\frac{c \cdot r}{r}$. 1042. $2c \cdot r$. 1043. $f'(r) \frac{c \cdot r}{r}$.

1044. 0. 1045. $c \cdot c_1$. 1046. $4c \cdot c_1$. 1047. 1.

1448. 2. 1049. $\frac{x+y+z}{xyz}$

1050 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$.

La solución general de esta ecuación es $f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$.

1051. Como $\operatorname{div} \frac{r}{r} = \frac{2}{r}$ y $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, entonces según el enunciado $2rf''(r) + 4f'(r) = \frac{2}{r}$, de donde $f(r) = \ln r + \frac{c_1}{r} + c_2$.

1052. $\operatorname{div} a = \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w) \right]$,

donde a_u, a_v, a_w son las proyecciones del vector a sobre las tangentes a las líneas de referencia correspondientes,

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

Las magnitudes L, M, N se llaman *coeficientes de Lamé*.

1053. $\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right]$.

1054. $\operatorname{div} a = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(a_\rho \rho^2 \operatorname{sen} \theta) + \rho \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \operatorname{sen} \theta) + \rho \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$.

1055. $(x^2 - 2xz)\, i + (y^2 - 2xy)\, j + (z^2 - 2yz)\, k$.

1056. $i + (xy - 2x)\, j + (2 - xz)\, k$.

1060. 0. 1061. 0. 1062. $-2c$. 1063. $c \times r$.

1064. 1065. $c_1 \times c$. 1066. 0. 1067. $\frac{f'(r)}{r}(r \times c)$.

1073. Para calcular el flujo valgámos de la fórmula de Ostro-

gradski $\Pi = \iint\limits_S a_n \, d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} a \, dw$. Como $\operatorname{div} a = y^2 + x^2 + 1$, entonces

$$\Pi = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iint\limits_D (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy \int\limits_0^{4-x^2-y^2} dz = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + 1) \times$$

$$\times (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy.$$

Pasemos a las coordenadas polares:

$$\Pi = \iint\limits_D (r^2 + 1)(4 - r^2) \, r \, dr \, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^2 (-r^5 + 3r^3 + 4r) \, dr = \frac{14\pi}{3}.$$

1074. $\operatorname{div} a = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Por la fórmula de Ostrogradski

$$\Pi = \iiint\limits_V 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dw = 3 \cdot 8 \iiint\limits_{V_1} (x^2 + y^2 + z^2) \, dw,$$

donde V_1 es el volumen de la parte de la esfera comprendida en el primer octante. Pasemos a las coordenadas esféricas:

$$x = \rho \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho \cos\theta,$$

$$dw = \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2,$$

$$24 \iiint\limits_V \rho^4 \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= 24 \int\limits_0^R \rho^4 \, d\rho \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = 2{,}4\pi R^5.$$

1075. $4\pi q$. 1076. 0. 1077. 10/3.

1078. a) $\frac{1}{10} \pi R^2 H (3R^2 + 2H^2)$; b) $\frac{3}{10} \pi R^2 H (R^2 + 2H^2)$.

1080. Sobre la circunferencia $a = R^3 \cos^3 t i - R^3 \operatorname{sen}^3 t j$, $dr = -R \operatorname{sen} t \, dt \, i + R \cos t \, dt \, j$. Por consiguiente, $a \cdot dr = -{}^1/_2 R^4 \operatorname{sen} 2t \, dt$. Al moverse por el arco de la circunferencia L en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj el parámetro t varía dentro de los límites de 0 a $\pi/2$. Por eso la integral lineal

a lo largo de L será igual a

$$A=\int_L a\cdot dr=-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}R^4\operatorname{sen}2t\,dt=-\frac{1}{2}R^4.$$

1081. $2\pi^2b^2$.

1082. La línea L consta de dos segmentos BO (sobre el eje Oy), OA (sobre el eje Ox) y de un arco AB de la astroide. El recorrido por L hace falta efectuarlo en el sentido contrario a las agujas del reloj. Por eso la circulación del vector será igual a

$$\oint_L a\cdot dr=\int_{AB}a\cdot dr+\int_{BO}a\cdot dr+\int_{OA}a\cdot dr.$$

Calculemos por separado cada una de las integrales del segundo miembro. Sobre la astroide

$$a=R\operatorname{sen}^3 t\,i-R\cos^3 t\,j,$$

$$dr=-3R\cos^2 t\operatorname{sen}t\,dt\,i+3R\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt\,j.$$

Por eso $a\cdot dr=-\frac{3}{4}R^2\operatorname{sen}^2 2t\,dt$. Al moverse por el arco AB en la dirección de A a B el parámetro t varía dentro de los límites de 0 a $\pi/2$. Tendremos

$$\int_{AB}a\cdot dr=-\frac{3}{4}R^2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2t\,dt=-\frac{3}{16}\pi R^2.$$

Sobre el segmento OA $a=-xj$, $dr=dxi$ y $a\cdot dr=0$. Por eso $\int_{OA}a\cdot dr=0$.

Análogamente $\int_{BO}a\cdot dr=0$. Por lo tanto, la circulación buscada es igual a $-3/16\,\pi R^2$.

1083. 0. 1084. $-\pi b^2$. 1085. a) 2π; b) 2π.

1086. $-\pi/R^6/8$. 1087. No lo tiene.

1088. $\operatorname{rot}a=0$, por eso el campo a es potencial y su potencial u se determina por la ecuación

$$du=(y+z)\,dx+(x+z)\,dy+(x+y)\,dz.$$

Esta ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=y+z,\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=x+z,\\ \frac{\partial u}{\partial z}&=x+y.\end{aligned}\right\}$$

De la primera ecuación del sistema resulta que $u=(y+z)\,x+\varphi(y,\ z)$. Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos $\partial\varphi(y,\ z)/\partial y=z$, de donde $\varphi(y,\ z)=zy+\psi(z)$. Sustituyendo $u=xy+xz+zy+\psi(z)$ en la tercera ecuación, obtendremos $\psi'(z)=0$, o sea, $\psi(z)=C=\text{const}$. De este modo, $u=xy+yz+zx+C$.

1089. $u=xyz\,(x+y+z)+C$.

1090. Sí.

Indice de materias

[1]) En el índice de materias las cifras claras indican el número de página y las escritas en negrilla, el número de problema. El subíndice „r" hace referencia a la respuesta del problema correspondiente. En ambos casos es útil recurrir tanto al planteo como a la solución del problema.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, I-110, GSP, URSS.